Глава 3

Модели на формални системи от първи ред

3.1 Структури за езици от първи ред

Нека $\mathcal{L}$ е език от първи ред. Всяка *структура* $\mathfrak{A}$ за $\mathcal{L}$ се състои от

- непразно множество $|\mathfrak{A}|$, наричано носител на $\mathfrak{A}$;
- n-местна операция $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}$ в $|\mathfrak{A}|$ (т.е. $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \to |\mathfrak{A}|$) за всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$;
- n-местна релация $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$ в $|\mathfrak{A}|$ (т.е. $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$) за всеки нелогически n-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{L}$;

Забележка 1.Бихме могли да разглеждаме и едно малко по-различно понятие за структура, а именно: обобщена структура $\mathfrak{A}$ за $\mathcal{L}$ се състои от

- носителят $|\mathfrak{A}|$ на $\mathfrak{A}$ е непразен клас $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\}$, където $\mathbf{A}$ е формула на ZF, в която $\mathbf{x}$ е единствената свободна променлива.
- за всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$, n-местна операция $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ (т.е. $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ е n-местен функционален символ на ZF, получен посредством разширение с дефиниции), такава че

$$\vdash_{ZF} \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_1] \to \cdots \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{x}_n] \to \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n]$$

- за всеки n-местен нелогически предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{L}$, n-местна релация $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ (т.е. $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ е n-местен предикатен символ на ZF, получен посредством разширение с дефиниции).

Ако $\mathcal{L}$ е краен език (език с краен брой нелогически символи), а $\mathfrak{A}$ е конкретна структура (в първоначалния смисъл на понятието) за $\mathcal{L}$, то тогава можем да дефинираме съответно класът носител на структурата, операциите и релациите в ZF чрез

- $\mathbf{A} \equiv \mathbf{x} \in |\mathfrak{A}|$;
- $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\mathbf{y} \leftrightarrow ((\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \in \mathbf{f}_{\mathfrak{A}} \mathbin{\&} \mathop{\&}_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{x}_i \in |\mathfrak{A}|) \vee (\varnothing = \mathbf{y} \mathbin{\&} \bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{x}_i \notin |\mathfrak{A}|)$.
- $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n \leftrightarrow (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$

и следователно можем да разглеждаме $\mathfrak{A}$ като обощена структура за $\mathfrak{A}$. Да отбележим, че ако $|\mathfrak{A}|$ не е конкретна структура, то няма да можем да дефинираме $\mathbf{F}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$, тъй като $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}$ и $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$ не са конкретни множества.

Забележка 2. Обобщените структури са в същност интерпретациите на $\mathcal{L}$ в ZF.

Забележка 3. Можем да разглеждаме класът на всички структури за $\mathcal{L}$, но не можем да разглеждаме класът на всички обобщени структури за $\mathcal{L}$.

Нека $\mathfrak{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$. С $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ ще означаваме езика, който се получава от $\mathcal{L}$, добавяйки нова константа $\mathbf{i}_\alpha$ за всеки елемент $\alpha \in |\mathfrak{A}|$. Константата $\mathbf{i}_\alpha$ ще наричаме име на елемента α. Дефинираме стойността в $\mathfrak{A}$ на затворените термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ чрез следната рекурсия:

(i) $\mathfrak{A}(\mathbf{i}_\alpha) \equiv \alpha$;

(ii) $\mathfrak{A}(\mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n) \equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_n))$, където $\mathbf{f}$ е n-местен функционален символ на $\mathcal{L}$, а $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са затворени термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

Дефинираме стойността в $\mathfrak{A}$ на затворените формули на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ чрез следната рекурсия:

(i) $\mathfrak{A}(\mathbf{a}=\mathbf{b}) \equiv \mathbb{T} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{a}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{b})$, където $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са затворени термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$;

(ii) $\mathfrak{A}(\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n) \equiv \mathbb{T} \iff (\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_n)) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}}$, където $\mathbf{p}$ е n-местен нелогически предикате символ на $\mathcal{L}$, а $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ са затворени термове на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$;

(iii) $\mathfrak{A}(\neg\mathbf{A}) \equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathbb{F}, & \text{иначе} \end{cases}$, където $\mathbf{A}$ е затворена формула на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

(iii) $\mathfrak{A}(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \equiv \begin{cases} \mathbb{F}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{B}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathbb{T}, & \text{иначе} \end{cases}$, където $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ са затворена формули на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$.

(iv) $\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T}$ за някое $\alpha \in |\mathfrak{A}|$, където $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$.

С директна проверка се установява, че

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\mathbf{A} \,\&\, \mathbf{B}) &\equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{B}) \equiv \mathbb{T} \\ \mathbb{F}, & \text{иначе} \end{cases} \\
\mathfrak{A}(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) &\equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{F} \\ \mathfrak{A}(\mathbf{B}), & \text{иначе} \end{cases} \\
\mathfrak{A}(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) &\equiv \begin{cases} \mathbb{T}, & \text{ако } \mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{B}) \\ \mathbb{F}, & \text{иначе} \end{cases} \\
\mathfrak{A}(\forall\mathbf{x}\mathbf{C}) &\equiv \mathbb{T} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{C}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T} \text{ за всяко } \alpha \in |\mathfrak{A}|.
\end{aligned}$$

за произволни затворени формули $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, а където $\mathbf{C}$ е формула на $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$.

Следващата теорема показва, съответствие между затворените термове и техните стойности в структурата.

Твърдение 3.1. Нека $\mathfrak{A}$ е структура за $\mathcal{L}$ и нека $\mathbf{b}$ е затворен терм на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$, каго $\mathfrak{A}(\mathbf{b}) \equiv \beta$. Нека $\mathbf{a}$ е терм на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ с променливи измежду $\mathbf{x}$, а $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{L}$ с променливи измежду $\mathbf{x}$. Тогава

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]) &\equiv \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]); \\
\mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]) &\equiv \mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]).
\end{aligned}$$

Доказателство. Ще докажем първото твърдение с индукция по построението на $\mathbf{a}$. Ако $\mathbf{a}$ не съдържа $\mathbf{x}$, твърдението е очевидно. Нека сега $\mathbf{a}$ съдържа $\mathbf{x}$. Ако $\mathbf{a} \equiv \mathbf{x}$, то $\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}] \equiv \mathbf{b}$, $\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]$ и твърдението следва директно от условието на твърдението. Нека, накрая, $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ за някой n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ с променливи измежду $\mathbf{x}$. Тогава предвид дефиницията на стойност на терм и индукционното предположение имаме

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]) &\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{1_{\mathbf{x}}}[\mathbf{b}]), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{n_{\mathbf{x}}}[\mathbf{b}])) \\
&\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{1_{\mathbf{x}}}[\mathbf{i}_\beta]), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{n_{\mathbf{x}}}[\mathbf{i}_\beta])) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]).
\end{aligned}$$

Второто твърдение ще докажем с индукция по построението на $\mathbf{A}$. Нека първо $\mathbf{A}$ е $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ за някои термове $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ с променливи измежду $\mathbf{x}$. Тогава предвид твърдението за термове имаме

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{T} &\iff \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{c}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}])) \\
&\iff \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{c}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta])) \iff \mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Нека сега $\mathbf{A}$ е $\mathbf{p}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n$ за някой n-местен нелогически предикатен символ $\mathbf{p}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ с променливи измежду $\mathbf{x}$. Тогава предвид твърдението за термове и дефиницията на стойност на формула имаме

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{T} &\iff (\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{1_{\mathbf{x}}}[\mathbf{b}]), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{n_{\mathbf{x}}}[\mathbf{b}])) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}} \\
&\iff (\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{1_{\mathbf{x}}}[\mathbf{i}_\beta]), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_{n_{\mathbf{x}}}[\mathbf{i}_\beta])) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Ако $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$, то $\mathbf{B}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$ и предвид индукционното предположение имаме

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathbf{A_x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{T} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{B_x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{F} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{B_x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{F} \Longleftrightarrow \mathfrak{A}(\mathbf{A_x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T}.\end{aligned}$$

Ако $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$, то $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ са формули със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$ и предвид индукционното предположение имаме

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathbf{A_x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{F} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{B_x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{C_x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{F} \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{B_x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{C_x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{F} \Longleftrightarrow \mathfrak{A}(\mathbf{A_x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{F}.\end{aligned}$$

Накрая, нека $\mathbf{A} \equiv \exists \mathbf{y} \mathbf{B}$. Тогава $\mathbf{B}$ е формула със свободни променливи измежду $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Ако $\mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$, то тогава

$$\mathbf{A_x}[\mathbf{b}] \equiv \mathbf{A} \equiv \mathbf{A_x}[\mathbf{i}_\beta]$$

и твърдението е очевидно. Ако $\mathbf{x} \not\equiv \mathbf{y}$, то тогава

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\mathbf{A_x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{T} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{B_y}[\mathbf{i}_\alpha]_\mathbf{x}[\mathbf{b}]) \equiv \mathbb{T} \text{ за някое } \alpha \in |\mathfrak{A}| \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{B_y}[\mathbf{i}_\alpha]_\mathbf{x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T} \text{ за някое } \alpha \in |\mathfrak{A}| \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A}(\mathbf{A_x}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T}.\end{aligned}$$

□

3.2 Изоморфни структури

Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са структури за езика $\mathcal{L}$. Ще казваме, че $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са *изоморфни* и ще пишем $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, ако съществува биекция $\varphi : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$, такава че

(i) $\varphi(\mathbf{f}_\mathfrak{A}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \equiv \mathbf{f}_\mathfrak{B}(\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n))$ за всеки n-местен функционален символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in |\mathfrak{A}|$;

(ii) $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{p}_\mathfrak{A} \iff (\varphi(\alpha_1), \dots, \varphi(\alpha_n)) \in \mathbf{p}_\mathfrak{B}$ за всеки n-местен нелогически предикатен символ $\mathbf{f}$ на $\mathcal{L}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in |\mathfrak{A}|$

Биекцията φ наричаме изоморфизъм на $\mathfrak{A}$ върху $\mathfrak{B}$. С директна проверка се установява, че $\mathrm{id}_\mathfrak{A}$ е изомрфизъм на $\mathfrak{A}$ върху $\mathfrak{A}$, ако φ е изоморфизъм на $\mathfrak{A}$ върху $\mathfrak{B}$, то φ^{-1} е изоморфизъм на $\mathfrak{B}$ върху $\mathfrak{A}$, и ако φ е изоморфизъм на $\mathfrak{A}$ върху $\mathfrak{B}$, а ψ е изоморфизъм на $\mathfrak{B}$ върху $\mathfrak{C}$, то $\psi \circ \varphi$ е изоморфизъм на $\mathfrak{A}$ върху $\mathfrak{C}$. В частност

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Longrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \text{ и } \mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \Longrightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}.$$

Теорема 3.2. Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са структури за езика $\mathcal{L}$ и нека φ е изоморфизъм на $\mathfrak{A}$ върху $\mathfrak{B}$. Нека $\mathbf{a}$ е терм на $\mathcal{L}$ с променливи измежду $\mathbf{x}_1$,..., $\mathbf{x}_n$ и $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{L}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1$,..., $\mathbf{x}_n$. Тогава за всеки избор на $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in |\mathfrak{A}|$ е в сила

$$\begin{aligned}\varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{i}_{\alpha_n}])) \quad &\equiv \quad \mathfrak{B}(\mathbf{a}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\varphi(\alpha_1)}, \dots, \mathbf{i}_{\varphi(\alpha_n)}]) \\ \mathfrak{A}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{i}_{\alpha_n}]) \quad &\equiv \quad \mathfrak{B}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\varphi(\alpha_1)}, \dots, \mathbf{i}_{\varphi(\alpha_n)}])\end{aligned}$$

Доказателство. Въвеждаме следните означения. Ще пишем

- $\mathbf{a}[\overline{\alpha}]$ вместо $\mathbf{a}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{i}_{\alpha_n}]$;
- $\mathbf{a}[\overline{\varphi(\alpha)}]$ вместо $\mathbf{a}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\varphi(\alpha_1)}, \dots, \mathbf{i}_{\varphi(\alpha_n)}]$;
- $\mathbf{A}[\overline{\alpha}]$ вместо $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\alpha_1}, \dots, \mathbf{i}_{\alpha_n}]$;
- $\mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}]$ вместо $\mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\varphi(\alpha_1)}, \dots, \mathbf{i}_{\varphi(\alpha_n)}]$.

Ще докажем първото твърдение с индукция по построението на $\mathbf{a}$. Ако $\mathbf{a} \equiv \mathbf{x}_k$, то тогава

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}[\overline{\alpha}])) &\equiv \varphi(\alpha_k) \\ &\equiv \mathfrak{B}(\mathbf{a}[\overline{\varphi(\alpha)}]). \end{aligned}$$

Нека сега $\mathbf{a} \equiv \mathbf{f}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m$ за някой m-местен функционален символ $\mathbf{f}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ на $\mathcal{L}$ с променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогава предвид индукционното предположение

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}[\overline{\alpha}])) &\equiv \varphi(\mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1[\overline{\alpha}]), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_m[\overline{\alpha}])) \\ &\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{B}}(\varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1[\overline{\alpha}])), \ldots, \varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_m[\overline{\alpha}]))) \\ &\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}(\mathbf{a}_1[\overline{\varphi(\alpha)}]), \ldots, \mathfrak{B}(\mathbf{a}_m[\overline{\varphi(\alpha)}])) \\ &\equiv \mathfrak{B}(\mathbf{a}[\overline{\varphi(\alpha)}]). \end{aligned}$$

Второто твърдение ще докажем с индукция по построението на $\mathbf{A}$. Нека първо$\mathbf{A}$ е $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, където $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са термове на $\mathcal{L}$ с променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогава предвид свойството на φ по отношение на предикатните символи и твърдението за термове имаме

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathbf{A}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathbb{T} &\iff \mathfrak{A}(\mathbf{a}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{b}[\overline{\alpha}]) \\ &\iff \varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}[\overline{\alpha}])) \equiv \varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{b}[\overline{\alpha}])) \\ &\iff \mathfrak{B}(\mathbf{a}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathfrak{B}(\mathbf{b}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \\ &\iff \mathfrak{B}(\mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Нека сега $\mathbf{A} \equiv \mathbf{p}\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m$ за някой m-местен нелогически предикатен символ $\mathbf{p}$ и термове $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ на $\mathcal{L}$ с променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогава предвид инективността на φ и твърдението за термове имаме

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathbf{A}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathbb{T} &\iff (\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1[\overline{\alpha}]), \ldots, \mathfrak{A}(\mathbf{a}_m[\overline{\alpha}])) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}} \\ &\iff (\varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_1[\overline{\alpha}])), \ldots, \varphi(\mathfrak{A}(\mathbf{a}_m[\overline{\alpha}])) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{B}} \\ &\iff (\mathfrak{B}(\mathbf{a}_1[\overline{\varphi(\alpha)}]), \ldots, \mathfrak{B}(\mathbf{a}_m[\overline{\varphi(\alpha)}])) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{B}} \\ &\iff \mathfrak{B}(\mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Нека $\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{B}$ за някоя формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{L}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогава

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathbf{A}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathbb{T} &\iff \mathfrak{A}(\mathbf{B}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathbb{F} \\ &\iff \mathfrak{B}(\mathbf{B}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathbb{F} \\ &\iff \mathfrak{B}(\mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathbb{T}. \end{aligned}$$

За $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \vee \mathbf{C}$ разсъждаваме аналогично. Нека накрая $\mathbf{A} \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}$ за някоя формула $\mathbf{B}$ на $\mathcal{L}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ и $\mathbf{x}$. Нека първо $\mathbf{x}$ е различна от $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Тогава

$$\mathbf{A}[\overline{\alpha}] \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}[\overline{\alpha}] \text{ и } \mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}] \equiv \exists\mathbf{x}\mathbf{B}[\overline{\varphi(\alpha)}].$$

Нека първо $\mathfrak{A}(\mathbf{A}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathbb{T}$. Тогава $\mathfrak{A}(\mathbf{B}[\overline{\alpha}]_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T}$ за някое $\beta \in |\mathfrak{A}|$. Оттук и индукционното предположение следва, че $\mathfrak{B}(\mathbf{B}[\overline{\varphi(\alpha)}]_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_{\varphi(\beta)}]) \equiv \mathbb{T}$ и значи $\mathfrak{B}(\mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathbb{T}$. Обратно, нека $\mathfrak{B}(\mathbf{A}[\overline{\varphi(\alpha)}]) \equiv \mathbb{T}$. Тогава $\mathfrak{B}(\mathbf{B}[\overline{\varphi(\alpha)}]_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_{\varphi(\gamma)}]) \equiv \mathbb{T}$ за някое $\gamma \in |\mathfrak{B}|$. Тъй като φ е сюрекция, то $\gamma = \varphi(\beta)$ за някое $\beta \in |\mathfrak{A}|$, откъдето съгласно индукционното предположение получаваме $\mathfrak{A}(\mathbf{B}[\overline{\alpha}]_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\beta]) \equiv \mathbb{T}$ и значи $\mathfrak{A}(\mathbf{A}[\overline{\alpha}]) \equiv \mathbb{T}$.

В случай, че $\mathbf{x}$ съвпада с, да речем, $\mathbf{x}_i$, то махаме $\mathbf{x}_i$ от списъка $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, махаме α_i от списъка $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и разсъждаваме аналогично на предния случай.

□

3.3 Модели. Теорема за валидност

Нека $\mathfrak{A}$ е структура за езика $\mathcal{L}$ и нека $\mathbf{A}$ е формула на $\mathcal{L}$ със свободни променливи измежду $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Конкретизация на $\mathbf{A}$ в $\mathfrak{A}$ ще наричаме всяка формула $\mathbf{A}'$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ от вида

$$\mathbf{A}' \equiv \mathbf{A}_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n}[\mathbf{i}_{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{i}_{\alpha_n}],$$

където $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in |\mathfrak{A}|$. Ще казваме, че формулата $\mathbf{A}$ на $\mathcal{L}$ е *вярна* (*валидна*) в $\mathfrak{A}$ и ще пишем

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{A},$$

ако $\mathfrak{A}(\mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$ за всяка конкретизация $\mathbf{A}'$ на $\mathbf{A}$ в $\mathfrak{A}$.[1]

Лема 3.3. Нека $\mathcal{F}$ е формална система и $\mathfrak{A}$ е структура за $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Тогава всяка логическа аксиома на $\mathcal{F}$ е вярна в $\mathfrak{A}$.

Доказателство. Нека първо разгледаме една съждителна аксиома $\neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}$. Тогава всяка нейна конкретизация в $\mathfrak{A}$ има вида $\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}'$, където $\mathbf{A}'$ е конкретизация на $\mathbf{A}$ в $\mathfrak{A}$. Но или $\mathfrak{A}(\mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$, или $\mathfrak{A}(\neg\mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$, и значи $\mathfrak{A}(\neg\mathbf{A}' \vee \mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$. Следователно

$$\mathfrak{A} \models \neg\mathbf{A} \vee \mathbf{A}.$$

Нека сега разгледаме аксиома за субституцията $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}$. Всяка нейна конкретизация има вида $\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}'] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}'$, където $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$, замествайки всички свободни променливи, различни от $\mathbf{x}$, с имена на елементи на $|\mathfrak{A}|$, а $\mathbf{a}'$ е затворен терм на $\mathcal{L}(\mathcal{F})_{\mathfrak{A}}$. Ако стойността на $\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}']$ в $\mathfrak{A}$ е $\mathbb{F}$, то цялата конкретизация приема стойност $\mathbb{T}$. За това нека предположим, че $\mathfrak{A}(\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}']) \equiv \mathbb{T}$. Нека $\mathfrak{A}(\mathbf{a}') \equiv \alpha$. Тогава $\mathfrak{A}(\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T}$, откъдето $\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$ и значи $\mathfrak{A}(\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}'] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$. Следователно

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}] \to \exists\mathbf{x}\mathbf{A}.$$

Всяка конкретизация на аксиомата $x = x$ има вида $\mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\alpha$, която очевидно приема стойност $\mathbb{T}$ и следователно

$$\mathfrak{A} \models x = x.$$

Нека сега да разгледаме аксиомата

$$x_1 = y_1 \to \cdots \to x_m = y_m \to \mathbf{f}x_1 \ldots x_m = \mathbf{f}y_1 \ldots y_m.$$

Всяка нейна конкретизация има вида

$$\mathbf{i}_{\alpha_1} = \mathbf{i}_{\beta_1} \to \cdots \to \mathbf{i}_{\alpha_m} = \mathbf{i}_{\beta_m} \to \mathbf{f}\,\mathbf{i}_{\alpha_1} \ldots \mathbf{i}_{\alpha_m} = \mathbf{f}\,\mathbf{i}_{\beta_1} \ldots \mathbf{i}_{\beta_m}$$

Ако за някое $1 \leqslant k \leqslant m$ имаме $\alpha_k \not\equiv \beta_k$, то $\mathfrak{A}(\mathbf{i}_{\alpha_k} = \mathbf{i}_{\beta_k}) \equiv \mathbb{F}$ и тогава цялата конкретизация приема стойност $\mathbb{T}$. За това нека предположим, че $\alpha_k \equiv \beta_k$ за $1 \leqslant k \leqslant m$. Тогава

$$\mathfrak{A}(\mathbf{f}\,\mathbf{i}_{\alpha_1} \ldots \mathbf{i}_{\alpha_m}) \equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \equiv \mathfrak{A}(\mathbf{f}\,\mathbf{i}_{\beta_1} \ldots \mathbf{i}_{\beta_m}).$$

Оттук $\mathfrak{A}(\mathbf{f}\,\mathbf{i}_{\alpha_1} \ldots \mathbf{i}_{\alpha_n} = \mathbf{f}\,\mathbf{i}_{\beta_1} \ldots \mathbf{i}_{\beta_n}) \equiv \mathbb{T}$ и значи цялата конкретизация приема стойност $\mathbb{T}$. Следователно

$$\mathfrak{A} \models x_1 = y_1 \to \cdots \to x_m = y_m \to \mathbf{f}x_1 \ldots x_m = \mathbf{f}y_1 \ldots y_m.$$

Аналогично се доказва, че

$$\mathfrak{A} \models x_1 = y_1 \to \cdots \to x_m = y_m \to \mathbf{p}x_1 \ldots x_m \to \mathbf{p}y_1 \ldots y_m.$$

за всеки нелогически m-местен предикатен символ $\mathbf{p}$ на $\mathcal{F}$.

Накрая, да разгледаме аксиомата

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2.$$

Всяка нейна конкретизация има вида

$$\mathbf{i}_{\alpha_1} = \mathbf{i}_{\beta_1} \to \mathbf{i}_{\alpha_2} = \mathbf{i}_{\beta_2} \to \mathbf{i}_{\alpha_1} = \mathbf{i}_{\alpha_2} \to \mathbf{i}_{\beta_1} = \mathbf{i}_{\beta_2}.$$

[1] $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}$ е еквивалентно на $\mathfrak{A}(\mathbf{A}_0) \equiv \mathbb{T}$, където $\mathbf{A}_0$ е универсално затваряне на $\mathbf{A}$. В частност, ако $\mathbf{A}$ е затворена, то $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}$ е еквивалентно на $\mathfrak{A}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T}$.

Ако $\alpha_1 \not\equiv \beta_1$, или $\alpha_2 \not\equiv \beta_2$, или $\alpha_1 \not\equiv \alpha_2$, то поне една от предпоставките приема стойност $\mathbb{F}$ и значи цялата конкретизация приема стойност $\mathbb{T}$. Ако $\alpha_1 \equiv \beta_1$, $\alpha_2 \equiv \beta_2$ и $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, то $\beta_1 \equiv \beta_2$, откъдето заключението на конкретизацията приема стойност $\mathbb{T}$ и следователно цялата конкретизация приема стойност $\mathbb{T}$. Следователно

$$\mathfrak{A} \models x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to x_1 = x_2 \to y_1 = y_2.$$

□

Дефиниция 3.4. Нека $\mathcal{F}$ е формална система. Ще казваме, че структурата $\mathfrak{A}$ за $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ е *модел* на $\mathcal{F}$ и ще пишем

$$\mathfrak{A} \models \mathcal{F},$$

ако в $\mathfrak{A}$ е вярна всяка нелогическа аксиома на $\mathcal{F}$.

Теорема 3.5 (Валидност)**.** Нека $\mathfrak{A} \models \mathcal{F}$. Тогава за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{F}$, ако $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, то $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}$.

Доказателство. Ще извършим доказателството с индукция по извода на теоремите на $\mathcal{F}$. Ако теоремата е логическа аксиома, то тя е вярна в $\mathfrak{A}$ съгласно лемата. Ако теоремата е нелогическа аксиома, то тя е вярна в $\mathfrak{A}$ съгласно дефиницията на модел. Нека сега да забележим, че всяка конкретизация на формула $\neg\mathbf{A}$ в $\mathfrak{A}$ има вида $\neg\mathbf{A}'$, където $\mathbf{A}'$ е конкретизация на $\mathbf{A}$ в $\mathfrak{A}$, а всяка конкретизация на $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ има вида $\mathbf{A}' \vee \mathbf{B}'$, където $\mathbf{A}'$ и $\mathbf{B}'$ са конкретизации съответно на $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в $\mathfrak{A}$. Оттук следва, че ако теоремата е получена въз основа на правилата (ПР), (ПСв), (ПА) или (ПС), то можем да докажем, че теоремата е вярна в $\mathfrak{A}$, аналогично на доказателството на теоремата за валидност на съждителното смятане.

Нека сега теоремата се получава чрез (П$\exists$). Тогава тя има вида $\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, където $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ е теорема и $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$. Всяка конкретизация на $\exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ има вида $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$, където $\mathbf{B}'$ е конкретизация на $\mathbf{B}$, а $\mathbf{A}'$ се получава от $\mathbf{A}$ замествайки свободните променливи, различни от $\mathbf{x}$, съответно с имената на елементите на $\mathfrak{A}$, с които са заместени свободните променливи на $\mathbf{B}$. Ако $\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}') \equiv \mathbb{F}$, то стойността на $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \mathbf{B}'$ е $\mathbb{T}$. За това нека $\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}') \equiv \mathbb{T}$. Тогава $\mathfrak{A}(\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha]) \equiv \mathbb{T}$ за някое $\alpha \in |\mathfrak{A}|$. Да забележим, че $\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha] \to \mathbf{B}'$ е конкретизация на $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (защото $\mathbf{x}$ не участва свободно в $\mathbf{B}$). Тогава, тъй като $\mathfrak{A} \models \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, то $\mathfrak{A}(\mathbf{A}'_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_\alpha] \to \mathbf{B}') \equiv \mathbb{T}$, откъдето $\mathfrak{A}(\mathbf{B}') \equiv \mathbb{T}$ и значи

$$\mathfrak{A}(\exists\mathbf{x}\mathbf{A}' \to \mathbf{B}') \equiv \mathbb{T}.$$

Следователно

$$\mathfrak{A} \models \exists\mathbf{x}\mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

□

Следствие 3.6. Ако една формална система $\mathcal{F}$ има конкретен краен модел, то $\mathcal{F}$ е непротиворечива. В общия случай, ако $\mathcal{F}$ има модел и ZF е непротиворечива, то $\mathcal{F}$ е непротиворечива.

Доказателство. Нека $\mathfrak{A} \models \mathcal{F}$. Имаме $\mathfrak{A} \not\models x \neq x$. Оттук и теоремата за валидност $\nvdash_{\mathcal{F}} x \neq x$ и слеодователно $\mathcal{F}$ е непротиворечива.

□

Нека $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}'$ и нека $\mathfrak{A}'$ е структура за $\mathcal{L}'$. Ще казваме, че $\mathfrak{A}$ е *обедняване* на $\mathfrak{A}'$ до езика $\mathcal{L}$, ако $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ имат един и същи носител и интерпретират символите на $\mathcal{L}$ по един и същи начин. Ясно е, че всяка затворена формула $\mathbf{A}'$ на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}}$ е формула и на $\mathcal{L}_{\mathfrak{A}'}$ (защото $\mathcal{L} \leqslant \mathcal{L}'$ и $|\mathfrak{A}| \equiv |\mathfrak{A}'|$) и

$$\mathfrak{A}(\mathbf{A}') \equiv \mathfrak{A}'(\mathbf{A}').$$

Следователно за всяка формула $\mathbf{A}$ на $\mathcal{L}$ е в сила

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{A} \iff \mathfrak{A}' \models \mathbf{A}.$$