Задачи върху функции.

Задача 1. Дадено е непразно множество S. Нека $f : S \to S$ и $g : S \to S$. Тези функции са такива, че

$$\forall x \in S \left(f(x) = g(f(f(x))) \;\wedge\; g(x) = f(g(f(x))) \right)$$

Докажете, че $f = g$.

Решение. Нека x е произволен елемент на S. В сила

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(f(f(x))) \quad // \text{ понеже } f(x) = g(f(f(x))) \\
&= \underbrace{g}_{fgf}(f(f(x))) \quad // \text{ понеже } g(Y) = f(g(f(Y))) \\
&= f(\underbrace{g(f(}_{f}f(f(x))))) \quad // \text{ понеже } g(f(f(Y))) = f(Y) \\
&= f(f(\underbrace{f}_{gff}(x))) \quad // \text{ понеже } f(x) = g(f(f(x))) \\
&= f(\underbrace{f(g(f}_{g}(f(x))))) \quad // \text{ понеже } f(g(f(Y))) = g(Y) \\
&= f(g(f(x))) \quad // \text{ понеже } f(g(f(x))) = g(x) \\
&= g(x) \quad // \text{ което и трябваше да покажем}
\end{aligned}$$

Показахме, че $\forall x \in S : f(x) = g(x)$. Тогава $f = g$. □

Задача 2. Докажете, че множеството от функциите от вида $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ е неизброимо безкрайно.

Решение. Да допуснем противното. А именно, че функциите от този вид може да бъдат изброени като $f_0, f_1, f_2, \ldots$. Да разгледаме числената редица $f_0(0), f_1(1), f_2(2), \ldots$. Но тази редица е функция с домейн $\mathbb{N}$ и кодомейн $\{0, 1\}$. Да дефинираме нотацията $\overline{f_k(k)}$ по следния начин: за всяко $k \in \mathbb{N}$:

$$\overline{f_k(k)} = \begin{cases} 1, & \text{ако } f_k(k) = 0 \\ 0, & \text{ако } f_k(k) = 1 \end{cases}$$

Сега да разгледаме редицата $\overline{f_0(0)}, \overline{f_1(1)}, \overline{f_2(2)}, \ldots$, която също е редица от нули и единици, което означава, че е функция с домейн $\mathbb{N}$ и кодомейн $\{0, 1\}$. Но функцията $\overline{f_0(0)}, \overline{f_1(1)}, \overline{f_2(2)}, \ldots$ се различава, **за всяко** $j \in \mathbb{N}$, от f_j върху поне една стойност, а именно j. Следователно, $\overline{f_0(0)}, \overline{f_1(1)}, \overline{f_2(2)}, \ldots$ не е нито една от функциите в наредбата. □

Определение 1. *Дефинираме "композиция на функции" по следния начин. Нека* X, Y *и* Z *са произволни множества. Нека* $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to Z$. *Функцията* $g \circ f : X \to Z$, *дефинирана така:*

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

наричаме композицията на g и f. *Внимание: в израза* $\boxed{g \circ f : X \to Z}$, $\boxed{g \circ f}$ *е името на функцията-композиция.*

Задача 3. Дадено е множество A и функция $h : A \to A$, която е сюрекция. Докажете, че за всяка функция $f : A \to A$ и всяка функция $g : A \to A$ е вярно, че ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$.

Решение. Разглеждаме произволни функции $f : A \to A$ и $g : A \to A$. Допускаме, че за всеки елемент $x \in A$ е вярно, че $f \circ h(x) = g \circ h(x)$, тоест, че $f(h(x)) = g(h(x))$, където h е сюрекция. Ще докажем, че за произволен елемент $a \in A$ е вярно, че $f(a) = g(a)$.

Щом h е сюрекция, съществува $b \in A$, такъв че $h(b) = a$. Щом за всеки елемент $x \in A$ е вярно, че $f(h(x)) = g(h(x))$, в частност за b е вярно, че $f(h(b)) = g(h(b))$. Но $h(b) = a$, така че $f(a) = g(a)$, което и трябваше да покажем. $\square$

Задача 4. Докажете, че композицията на функции е асоциативна.

Решение. Иска се да докажем, че ако X, Y, W и Z са произволни домейни и $f : X \to Y$ и $g : Y \to W$ и $h : W \to Z$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Но двете функции $(h \circ g) \circ f$ и $h \circ (g \circ f)$ имат един и същи домейн и един и същи кодомейн, така че, за да покажем, че са равни, достатъчно е да покажем, че за всеки $x \in X$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Разглеждаме произволен $x \in X$. Щом f, g и h са функции, съществува единствен $y \in Y$, такъв че $f(x) = y$, съществува единствен $w \in W$, такъв че $g(y) = w$ и съществува единствен $z \in Z$, такъв че $f(w) = z$. И така, щом веднъж изберем x, елементите y, w и z са уникално определени.

Очевидно $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$ и това е елементът z. Но $((h \circ g) \circ f)(x)$ е композицията на $h \circ g$ и f. Очевидно $(h \circ g)(y) = z$, където $y = f(x)$, така че $((h \circ g) \circ f)(x)$ също е z. Доказахме, че композицията на функции е асоциативна. $\square$

Определение 2. *Нека W е произволно множество и $h : W \to W$ е произволна. За всяко $n \in \mathbb{N}^+$ дефинираме, че*

$$h^n = \begin{cases} h, & \text{ако } n = 1, \\ h \circ h^{n-1}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Изразът $\boxed{h^n}$ не означава познатото ни от училище повдигане на степен, а е начин за записване на $n - 1$ кратна композиция на функцията h със себе си.

Задача 5. Нека U е произволен универсум и $A, B \subseteq U$ са произволни множества в него. Дефинираме $f : 2^U \to 2^U$ така:

$$\forall x \in 2^U : f(x) = A \cap (B \cup x)$$

Докажете, че $f^2 = f$.

Решение. Наистина,

$$\begin{aligned} & f^2(x) = f(A \cap (B \cup x)) = A \cap (B \cup (A \cap (B \cup x))) = \\ & A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B \cup x)) = A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup x)) = \\ & (A \cap (B \cup A)) \cap (B \cup x) = A \cap (B \cup x) = f(x) \qquad \square \end{aligned}$$

Задача 6. Неща A и B са множества. Нека $f : A \to B$ и $g : A \to B$. Докажете или опровергайте, че

① $f \cap g$ е функция.

② $f \cap g$ е функция с домейн A и кодомейн B.

③ $f \cup g$ е функция.

④ Ако $g \subseteq f$, то $f \cup g$ е функция с домейн A и кодомейн B.

Решение. Да разгледаме булетите един след друг.

① Твърдението е вярно. Първо да отбележим, че от формална гледна точка, изразът "$f \cap g$" е добре дефиниран, понеже и f, и g са множества, така операцията сечение е приложима върху тях. Нека

$$A' = \{x \in A \,|\, f(x) = g(x)\}$$
$$B' = \{y \in B \,|\, \exists x \in A(f(x) = g(x) = y)\}$$

Ще докажем, че $f \cap g$ е тотална функция с домейн A' и кодомейн B'. Наистина, за всяко $x \in A'$ знаем, че

– съществува единствено $y_1 \in B$, такова че $f(x) = y_1$, понеже f е тотална функция и

– съществува единствено $y_2 \in B$, такова че $g(x) = y_2$, понеже g е тотална функция.

Освен това въпросните y_1 и y_2 съвпадат, понеже дефиницията на A' е такава, и този елемент $y_1 = y_2$ е елемент на B', понеже дефиницията на B' е такава. Заключаваме, че за всяко $x \in A'$ съществува единствено $y \in B'$, такова че $(f \cap g)(x) = y$. Но това е дефиницията на тотална функция с домейн A' и кодомейн B'.

② В общия случай това не е вярно. Като контрапример да разгледаме $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $f = \{(a, c), (b, d)\}$ и $g = \{(a, d), (b, c)\}$. Тогава $f \cap g = \emptyset$. Това не е тотална функция с домейн A и кодомейн B.

Резултатът от ① остава в сила! В този пример, $A' = \emptyset$ и $B' = \emptyset$, така че $f \cap g$ е тотална функция, но с празни домейн и кодомейн (така че самата тя е празна).

И така, в общия случай $f \cap g$ е само частична функция, но не и тотална функция, с домейн A и кодомейн B.

③ Твърдението не е вярно. Като контрапример пак да разгледаме $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $f = \{(a, c), (b, d)\}$ и $g = \{(a, d), (b, c)\}$. Тогава $f \cup g = \{(a, c), (b, d), (a, d), (b, c)\}$. Това не е дори частична функция с домейн A и кодомейн B.

④ Твърдението е вярно. Щом $g \subseteq f$, то за всяка наредена двойка $(x, y) \in g$ е вярно, че $(x, y) \in f$. Но g е функция с домейн A и кодомейн B, така че за всяко $x \in A$ има точно една наредена двойка $(x, y) \in g$, която, както видяхме, е елемент и на f. Ключовото наблюдение е, че f не съдържа други елементи, понеже f също е функция с домейн A и кодомейн B (така че за всяко $w \in A$ има точно една наредена двойка $(w, z) \in B$). Щом f не съдържа други елементи, $f = g$. Щом $f = g$, то $f \cup g = f \cup f = f$. Знаем, че f е функция с домейн A и кодомейн B. Тогава и $f \cup g$ е функция с домейн A и кодомейн B. □

Задача 7. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Намерете f, ако $g(x) = 2x + 1$ и $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 3$.

б) Намерете g, ако $f(x) = 3x - 1$, $(g \circ f)(x) = 6x + 5$ и g е линейна функция, тоест $g(x) = ax + b$ за някакви $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение.

а) Щом $g(x) = 2x + 1$, то $g(f(x)) = 2f(x) + 1$. Дадено е, че $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 3$, но това е същото като $g(f(x)) = 2x^2 - 3$. Тогава $2f(x) + 1 = 2x^2 - 3$, откъдето $f(x) = x^2 - 2$.

б) Търсим a и b, такива че $g(x) = ax + b$. Щом $f(x) = 3x - 1$, то $g(f(x)) = a(3x - 1) + b = 3ax + b - a$, така че $(g \circ f)(x) = 3ax - a + b$. От друга страна, дадено е, че $(g \circ f)(x) = 6x + 5$. Тогава

$$\begin{aligned} 3a &= 6 \\ -a + b &= 5 \end{aligned}$$

откъдето веднага получаваме $a = 2, b = 7$. И така, $g(x) = 2x + 7$. $\square$