Задачи с доказателства по индукция.

Съдържание

1 Обикновена индукция

1.1 Тъждества

Задача 1. Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{(n+1)} + 2$$

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е $1 \times 2^1 = (1-1) \times 2^{1+1} + 2$. Лявата страна е 2. Дясната страна е 2. Твърдението в базовия случай е вярно. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някое $n \geq 1$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n + 1$. Твърдението е:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^k = n2^{(n+2)} + 2$$

Лявата страна е:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k2^k &= \\
\sum_{k=1}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} &= \qquad \textit{(съгласно индуктивното предположение)} \\
(n-1)2^{(n+1)} + 2 + (n+1)2^{n+1} &= \\
n2^{(n+1)} - 2^{(n+1)} + 2 + n2^{(n+1)} - 2^{(n+1)} &= \\
2n2^{(n+1)} + 2 &= \\
n2^{(n+2)} + 2 &= \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

□

Задача 2. Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$.

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е $1 \times (1!) = (1+1)! - 1$. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някое $n \geq 1$.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме твърдението за $n+1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k!) &= \\
\sum_{k=1}^{n} k(k!) + (n+1)((n+1)!) &= \qquad \textit{(съгласно индуктивното предположение)} \\
(n+1)! - 1 + (n+1)((n+1)!) &= \\
(1 + (n+1))((n+1)!) - 1 &= \\
(n+2)((n+1)!) - 1 &= \qquad \textit{(съгласно дефиницията на факториела)} \\
(n+2)! - 1 &= \\
((n+1)+1)! - 1 & \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

□

Задача 3. Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е: $1 \cdot 2 \cdot 3 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някое $n \geq 1$.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме твърдението за $n+1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \\
\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) &= \qquad \textit{(съгласно инд. предположение)} \\
\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) &= \\
(n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4}+1\right) &= \\
(n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n+4}{4}\right) &= \\
\frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)((n+1)+3)}{4} & \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

□

Задача 4. Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$.

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е: $(2\cdot 0+1)^2 + (2\cdot 1+1)^2 = \frac{(1+1)(2\cdot 1+1)(2\cdot 1+3)}{3}$. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някое $n \geq 1$.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме твърдението за $n+1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)^2 &= \\
\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 + (2(n+1)+1)^2 &= \\
\sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2 + (2n+3)^2 &= \qquad \textit{(съгласно инд. предп.)} \\
\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 &= \\
(2n+3)\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3} + (2n+3)\right) &= \\
(2n+3)\left(\frac{2n^2+n+2n+1}{3} + \frac{6n+9}{3}\right) &= \\
(2n+3)\left(\frac{2n^2+9n+10}{3}\right) &= \\
(2n+3)\frac{(n+2)(2n+5)}{3} &= \\
\frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3} &= \\
\frac{(n+1)+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)+3)}{3} & \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

$\square$

Задача 5. Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i \, i^2 = (-1)^1 \, 1 \left(\frac{1+1}{2} \right)$$

Лявата страна е:

$$(-1)^1 \, 1^2 = -1$$

Дясната страна е

$$(-1)^1 \, 1 \left(\frac{2}{2} \right) = -1$$

Твърдението в базовия случай е вярно. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

за някое цяло положително n.

Индуктивна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Твърдението е:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \, i^2 = (-1)^{n+1} \, (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \tag{1}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \, i^2 =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 \right) + (-1)^{n+1} (n+1)^2 = \qquad \text{(съгласно индуктивното предположение)}$$

$$(-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right) + (-1)^{n+1} (n+1)^2 =$$

$$(-1)^n (n+1) \left(\frac{n}{2} - (n+1) \right) =$$

$$(-1)^n (n+1) \left(-\frac{n}{2} - 1 \right) =$$

$$(-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) =$$

$$(-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right)$$

Доказахме чрез еквивалентни преобразувания и индуктивното предположение, че лявата страна на (1) е равна на дясната. □

Задача 6. Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \sum\limits_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$, където нотацията H_n означава $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Решение.

База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението

$$\sum_{k=1}^{1} H_k = (1+1)H_1 - 1$$

което е същото като $H_1 = 2H_1 - 1$, което е същото като $\frac{1}{1} = 2 \times \frac{1}{1} - 1$, което е тривиално вярно.

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някоя стойност $n \geq 1$ на аргумента.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е $\sum_{k=1}^{n+1} H_k$. Следната последователност от равенства е в сила:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} H_k &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
\left(\sum_{k=1}^{n} H_k\right) + H_{n+1} &= && \text{(от инд. предположение)}\\
(n+1)H_n - n + H_{n+1} &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
(n+1)H_n - n + H_{n+1} + (n+1)H_{n+1} - (n+1)H_{n+1} &= \\
(n+1)H_n - n - (n+1)H_{n+1} + (n+2)H_{n+1} &= \\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(H_n - H_{n+1}\right) - n &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(H_n - H_n - \frac{1}{n+1}\right) - n &= \\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(-\frac{1}{n+1}\right) - n &= \\
(n+2)H_{n+1} - 1 - n &= \\
(n+2)H_{n+1} - (n+1)
\end{aligned}$$

Следователно, $\sum_{k=1}^{n+1} H_k = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$. □

1.2 Неравенства

Задача 7. Нека x е някое реално число, такова че $x > -1$. Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е

$$1 + x \geq 1 + x$$

което е тривиално вярно. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

за някое положително n.

Индуктивна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n + 1$. Твърдението е:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x \tag{2}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\begin{aligned}
&(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq && \text{(съгласно индуктивното предположение)}\\
&(1 + nx)(1 + x) = \\
&1 + x + nx + nx^2 = \\
&1 + (n + 1)x + nx^2 \geq && \text{(тъй като } nx^2 \geq 0\text{)}\\
&1 + (n + 1)x
\end{aligned}$$

Доказахме чрез еквивалентни преобразувания, индуктивното предположение и очевидни неравенства, че лявата страна на (2) е по-голяма или равна на дясната. □

Задача 8. Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Решение.

База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{1}$, което е същото като $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$, което е тривиално вярно.

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някоя стойност $n \geq 1$ на аргумента.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n + 1$.

Лявата страна е $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Следната последователност от неравенства и равенства е в сила:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= && \text{(от асоциативността на събирането)}\\
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq && \text{(от инд. предположение)}\\
\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \\
\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \\
\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} &\geq \\
\frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} &= \\
\frac{n+1}{\sqrt{n+1}} &= \\
\sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

Следователно, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$. □

Задача 9. Докажете по индукция по n, че за всяко цяло число $n \geq 2$ е в сила:

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

Решение.

База: Базата е за $n = 2$. Твърдението става

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) &< \frac{2}{2^2} \;\leftrightarrow\\
1 - \frac{1}{\sqrt{2}} &< \frac{1}{2} \;\leftrightarrow\\
\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} &< \frac{1}{2} \;\leftrightarrow\\
\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} &< \frac{1}{2} \;\leftrightarrow\\
\frac{(\sqrt{2})^2-1^2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} &< \frac{1}{2} \;\leftrightarrow\\
\frac{1}{2+\sqrt{2}} &< \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

което очевидно е вярно, понеже $\sqrt{2} > 0$.

Индуктивно предположение: Допускаме, че

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{n^2}$$

за някое $n \geq 2$.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

В сила са следните неравенства и равенства.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) &= \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad \texttt{// съгласно индуктивното предположение}\\
&< \frac{2}{n^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= \frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{n^2\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{2(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)}{n^2\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+1)}\\
&= \frac{2(n+1-1)}{n^2(n+1+\sqrt{n+1})}\\
&= \frac{2}{n(n+1+\sqrt{n+1})}\\
&= \frac{2}{n(n+1)+n\sqrt{n+1}} \quad \texttt{// тъй като } n \geq \sqrt{n+1} \texttt{ за всяко } n \geq 2\\
&\leq \frac{2}{n(n+1)+\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{2}{n(n+1)+n+1}\\
&= \frac{2}{(n+1)(n+1)}\\
&= \frac{2}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Даказахме, че $\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) < \frac{2}{(n+1)^2}$, използвайки индуктивното предложение и факта, че $n \geq \sqrt{n+1}$ за всяко $n \geq 2$. Този факт е очевиден, но за пълен отговор трябва да бъде доказан. Ето как може да бъде доказан. Нека $n \geq 2$. Тогава $n-1 \geq 0$. Тогава $(n-1)^2 \geq 0$, тоест $n^2-2n+1 \geq 0$. Тогава

$$n^2 \geq 2n-1 \leftrightarrow n^2 \geq n+n-1$$

Но щом $n \geq 2$, в сила е

$$n^2 \geq n+2-1$$

тоест $n^2 \geq n+1$. Тогава $n \geq \sqrt{n+1}$. □

1.3 Делимости

Задача 10. Докажете по индукция, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ : 4^{n+1} + 5^{2n-1}$ се дели на 21.

Решение.

База: За $n = 1$ твърдението е: $4^2 + 5^1 = 16 + 5 \equiv 0 \pmod{21}$. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някое $n \geq 1$.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме твърдението за $n + 1$.

$$
\begin{aligned}
4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1} &= \\
4.4^{n+1} + 5^2.5^{2n-1} &= \\
4.4^{n+1} + 25.5^{2n-1} &= \\
4.4^{n+1} + (4+21).5^{2n-1} &= \\
4.4^{n+1} + 4.5^{2n-1} + 21.5^{2n-1} &= \\
4(\underbrace{4^{n+1} + 5^{2n-1}}_{\text{дели се на 21 съгласно инд. предп.}}) + \underbrace{21.5^{2n-1}}_{\text{очевидно се дели на 21}} & \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

□

Задача 11. Докажете по индукция, че $3^n - 1$ е четно число за всяко естествено n.

Решение.

База: Базовият случай е $n = 0$. Твърдението става, "$3^0 - 1$ е четно", което очевидно е вярно.

Индуктивно предположение: Да допуснем, че твърдението е вярно за някое естествено число n.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n + 1$: "$3^{n+1} - 1$ е четно число". Но

$$3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1 = (2+1) \times 3^n - 1 = 2 \times 3^n + 3^n - 1$$

Очевидно 2×3^n е четно число за всяко естествено n, а $3^n - 1$ е четно от индуктивното предположение. Сумата на четни числа задължително е четно число. С което показахме, че твърдението "$3^{n+1} - 1$ е четно число" е вярно. □

Задача 12. Докажете по индукция, че $11^n - 6$ се дели на 5 за всяко естествено n.

Решение.

База: Базовият случай е $n = 0$. Твърдението става, "$11^0 - 6$ се дели на 5", което очевидно е вярно.

Индуктивно предположение: Да допуснем, че твърдението е вярно за някое естествено число n.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$: "$11^{n+1} - 6$ се дели на 5". Но

$$11^{n+1} - 6 = 11 \times 11^n - 6 = (10+1) \times 11^n - 6 = 10 \times 11^n + 11^n - 6$$

Очевидно 10×11^n се дели на 5, а $11^n - 6$ се дели на 5 от индуктивното предположение. Сумата на числа, делящи се на 5, задължително се дели на 5. С което показахме, че твърдението "$11^{n+1} - 6$ се дели на 5" е вярно. □

1.4 Разни

Задача 13. Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Можете да ползвате наготово изучаваните в час свойства на операциите върху множества.

Решение.

База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\overline{\bigcap_{i=1}^{1} A_i} = \bigcup_{i=1}^{1} \overline{A_i}$, което е същото като $\overline{A_1} = \overline{A_1}$, което е тривиално вярно.

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност $n \geq 1$ на аргумента.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е:

$$
\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i} &= && \text{(от асоциативността на сечението)}\\
\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}} &= && \text{(от закона на Де Морган)}\\
\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} \bigcup \overline{A_{n+1}} &= && \text{(от инд. предположение)}\\
\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \bigcup \overline{A_{n+1}} &= && \text{(от асоциативността на обединението)}\\
\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{A_i}
\end{aligned}
$$

□

Задача 14. Докажете по индукция, че за всяко крайно непразно множество A, броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

Решение. Нека 2^A степенното множество на A. Дефинираме, че:

$$
\begin{aligned}
2^A_e &= \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е четно число.}\}\\
2^A_o &= \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е нечетно число.}\}
\end{aligned}
$$

Задачата се състои в това, да се докаже, че $\forall A$, такова че $A \neq \emptyset$, $|2^A_e| = |2^A_o|$. Доказателството е с индукция по $|A|$.

База: $|A| = 1$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, A\}$$

Очевидно

$$2^A_e = \{\emptyset\}$$
$$2^A_o = \{A\},$$

така че $|2^A_e| = |2^A_o|$ е вярно.

Индуктивно предположение: Нека твърдението е вярно за всяко множество A, такова че $|A| = n$. Тоест,

$$\forall A,\ \text{такова че } |A| = n \colon |2^A_o| = |2^A_e| \tag{3}$$

Индуктивна стъпка: Разглеждаме някое множество A, такова че $|A| = n + 1$. Нека a е произволен елемент на A. Очевидно 2^A се разбива на следните четири подмножества:

$$B_e = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$B_o = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$
$$C_e = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$C_o = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$

Очевидно

$$2^A_e = B_e \cup C_e$$
$$2^A_o = B_o \cup C_o$$

Тъй като $B_e \cap C_e = \emptyset$ и $B_o \cap C_o = \emptyset$,

$$|2^A_e| = |B_e| + |C_e| \tag{4}$$
$$|2^A_o| = |B_o| + |C_o| \tag{5}$$

Нека $A' = A \setminus \{a\}$. Съгласно индуктивното предположение (12),

$$|2^{A'}_e| = |2^{A'}_o| \tag{6}$$

Очевидно е, че $2^{A'}_e = C_e$ и $2^{A'}_o = C_o$. Следователно,

$$|C_e| = |C_o| \tag{7}$$

Ще покажем, че $|B_e| = |B_o|$. Забележете, че

$$|B_e| = |C_o| \tag{8}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_e се получава от точно един елемент v на C_o чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,

- всеки елемент w на C_o се получава от точно един елемент z на B_e чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

Аналогично,

$$|B_o| = |C_e| \tag{9}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

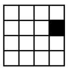
- всеки елемент u на B_o се получава от точно един елемент v на C_e чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,

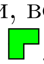
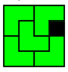
- всеки елемент w на C_e се получава от точно един елемент z на B_o чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

От (8), (7) и (9) следва, че $|B_e| = |C_o| = |C_e| = |B_o|$, а оттук съгласно транзитивността на равенстото имаме:

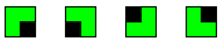
$$|B_e| = |B_o| \tag{10}$$

От (7), (10), (4) и (5) следва, че $|2^A_e| = |2^A_o|$. □

Задача 15. Дадена е квадратна дъска с размери $2^n \times 2^n$ сантиметра, за някое естествено число n. Дъската е разчертана на еднакви квадратчета с размери 1×1 сантиметър. Всички квадратчета са бели с изключение на едно, което е черно, което се намира на *произволно място*. Казваме, че черното квадратче е "дупката". Ето пример за такава дъска за $n = 2$: .

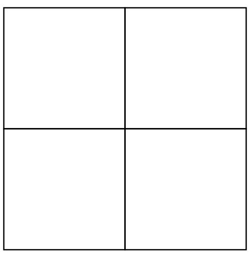
Дадени са и неограничено много Г-образни форми, всяка от които се състои от три квадратчета, всяко 1×1 сантиметър, долепени ето така: . Г-образните форми може да бъдат въртени на 90, 180 или 270 градуса и да бъдат слагани върху дъската, така че всяка Г-форма да покрие точно три нейни *бели* квадратчета. Дупката не може да бъде покривана. Докажете, че всяка дъска $2^n \times 2^n$ с дупка на произволно място може да бъде покрита с Г-образни форми, които не се застъпват. Например, показаната дъска 4×4 може да бъде покрита ето така: .

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по n. Базата е за $n = 1$. Тогава дъската е 2×2 и има четири възможности за мястото на дупката:

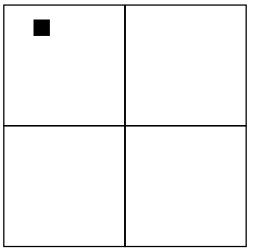


Очевидно за всяка от тях дъската може да бъде покрита от Г-образни форми (и по-точно, само една форма, но това няма значение).

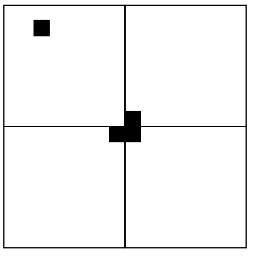
Да разгледаме някое естествено n и да допуснем, че дъската $2^n \times 2^n$ може да бъде покрита с Г-образни форми независимо от това, къде е дупката. Сега да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Разглеждаме дъска $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ и си представяме, че тя се състои от четири поддъски $2^n \times 2^n$, долепени една до друга:



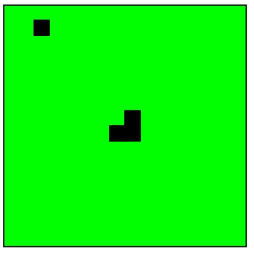
Дупката се намира в точно една от тези четири поддъски. Без ограничение на общността, нека дупката е в горната лява поддъска:



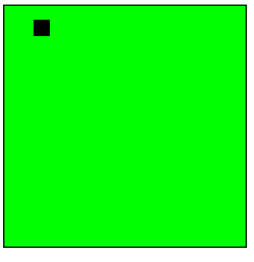
Тъй като останалите три поддъски нямат дупки, индуктивното предположение не е директно приложимо. Да сложим още три дупки, по една във всяка от останалите поддъски ето така:



Сега вече индуктивното предположение е в сила за всяка от четирите поддъски. Съгласно него, всяка от тях може да бъде покрита с Г-образни форми, при което всяка от дупките остава непокрита:



Сега слагаме още една Г-образна форма, покривайки трите дупки, които добавихме изкуствено:



Конструирахме дъска с размери $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, която има дупка на произволно място и е покрита с Г-образни форми. $\square$

Задача 16. Нека C е окръжност. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}^+$, за всяко множество A от $2n$ точки от C, за всяко разбиване на $\{A_1, A_2\}$ на A, такова че $|A_1| = |A_2|$, е вярно следното: съществува точка $a \in A_1$, такава че при пълна обиколка около окръжността, започваща (и завършваща) в a, за всеки момент от обикалянето е вярно, че броят на точките от A_1, които сме срещнали до момента, е поне колкото броя на точките от A_2, които сме срещнали до момента.

Решение. По индукция по n. За по-голяма яснота, нека точките от A_1 са червените точки, а точките от A_2 са сините точки. Твърдението става следното: задължително има червена точка, такава че ако тръгнем от нея (в коя да е посока) и направим пълна обиколка, във всеки момент от обикалянето, броят на червените точки, които сме срещнали до момента, е равен или по-голям от броя на сините точки, които сме срещнали до момента.

База: Ако $n = 1$, то имаме точно една червена и точно една синя точка. Твърдението е очевидно вярно. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за всяко разполагане на $n - 1$ червени и $n - 1$ сини точки върху окръжността за някое $n \geq 1$.

Индуктивна стъпка: Да разгледаме произволно разполагане на множество A, състоящо се от n червени и n сини точки. Очевидно съществува такава червена точка r и такава синя точка b, че r и b са съседи върху окръжността по посока на часовниковата стрелка в смисъл, че ако се движим от r нататък по посока на часовниковата стрелка, първата точка от A, на която попадаме, е точка b. Да премахнем точки r и b от A. Вече върху окръжността има множество от $n-1$ червени и $n-1$ сини точки и индуктивното предположение е в сила. Съгласно него, поне една от червените точки е такава, че ако започнем да обикаляме от нея, във всеки момент броят на срещнатите червени е поне колкото броят на срещнатите сини. Да наречем тази червена точка x.

Сега да върнем точки r и b в A. С други думи, връщаме се към конфигурацията от n червени и n сини точки. Но между r и b няма точки от A по конструкция и r е преди b в посока по часовниковата стрелка. Да си представим, че правим пълна обиколка от x до x по часовниковата стрелка.

- Преди да достигнем до r, от индуктивното предположение знаем, че във всеки момент броят на срещнатите червени точки е поне колкото броят на срещнатите сини точки.
- Достигайки r, вече е вярно, че броят на срещнатите червени е по-голям от броя на срещнатите сини, защото по отношение на индуктивното предположение, r е допълнителна червена точка.
- Достигайки b, със сигурност е вярно, че броят на срещнатите червени до момента е поне колкото броя на срещнатите сини до момента, защото приносът на b канцелира приноса на r.
- След b, чак до x, остава в сила, че във всеки момент броят на срещнатите червени е поне колкото броят на срещнатите сини. Това следва от индуктивното предположение – сега приносът на r и b е точно нула.

Доказахме, че по време на пълната обиколка от x до x по часовниковата стрелка, във всеки момент броят на срещнатите червени точки е поне колкото броят на срещнатите сини точки. □

Задача 17. Нека $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Нека S_n е множеството от пермутациите на числата 1, 2, ..., n. Ако $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ са пермутации, казваме, че π_1 се получава от π_2 чрез *транспозиция*, ако π_1 се получава от π_2 чрез размяна на точно две числа. Примерно, ако $n = 5$ и

$$\pi_1 = 2\,1\,3\,4\,5$$
$$\pi_2 = 4\,1\,3\,2\,5$$
$$\pi_3 = 1\,4\,3\,2\,5$$

то π_1 се получава от π_2 чрез транспозиция (също така е вярно, че π_2 се получава от π_1 чрез транспозиция) и π_2 се получава от π_3 чрез транспозиция, но не е вярно, че π_1 се получава от π_3 чрез транспозиция.

Докажете или опровергайте, че за всяко $n \geq 2$, за всеки две различни пермутации $\pi', \pi'' \in S_n$ е вярно, че π' се получава от π'' чрез серия от транспозиции.

Решение. Твърдението е вярно и ще го докажем с обикновена индукция по n.

База. Базата е $n = 2$, като очевидно $|S_n| = 2$ и всяка оп пермутациите $1\,2$ и $2\,1$ се получава от другата чрез серия от точно една транспозиция.

Индуктивно предположение. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое $n \geq 2$.

Индуктивна стъпка. Разглеждаме S_{n+1}. Множеството S_{n+1} се разбива на

- S': пермутациите от S_{n+1}, в които $n+1$ е на позиция $n+1$ (образно казано, в десния край).
- S'': пермутациите от S_{n+1}, в които $n+1$ не е на позиция $n+1$.

Разглеждаме произволни различни пермутации $\sigma, \tau \in S_{n+1}$. Следните случаи са изчерпателни.

Случай 1: $\sigma \in S'$ и $\tau \in S'$. С други думи, и σ, и τ завършват с $n+1$. Нека σ' е векторът с дължина n, който се получава от σ при премахване на $n+1$. Нека τ' е векторът с дължина n, който се получава от τ при премахване на $n+1$. Очевидно е, че както σ', така и τ' са елементи на S_n и за тях индуктивното предложение е в сила. Щом σ' се получава от τ' чрез серия от транспозиции, то очевидно σ се получава от τ чрез същата серия от транспозиции, само че във всяка междинна пермутация има едно $n+1$ накрая.

Случай 2: Точно едната от σ и τ е в S'. БОО, нека $\sigma \in S_{n+1}$. Тогава в τ числото $n+1$ не е на позиция $n+1$, но то е някъде. Да кажем, че в τ числото $n+1$ е на позиция k, за $1 \leq k \leq n$. С една транспозиция, разменяйки числата на позиции k и $n+1$, трансформираме τ в пермутация ψ. Очевидно, $\psi \in S'$ и ψ се получава от τ чрез серия от транспозиции. Щом и σ, и ψ са в S', то σ се получава от ψ чрез серия от транспозиции като **Случай 1**. Тогава очевидно σ се получава от τ чрез серия от транспозиции.

Случай 3: Нито едната от σ и τ не е в S'. Тогава Тогава в σ числото $n+1$ не е на позиция $n+1$, но то е някъде. Да кажем, че в σ числото $n+1$ е на позиция k, за $1 \leq k \leq n$. С една транспозиция, разменяйки числата на позиции k и $n+1$, трансформираме σ в пермутация α. След това продължаваме като в **Случай 2**. □

Задача 18. n шахматисти играят в турнир, в който всеки два участника играят точно една партия помежду си. Във всяка изиграна партия има победител. Докажете, че има поне един играч X, такъв че за всеки друг играч Y е вярно поне едно от следните:

- Y е загубил от X;
- Y е загубил от някой, който е загубил от X.

Решение. Ще докажем твърдението по индукция по n.

База. На практика няма смисъл от турнир със само един участник, така че ще вземем база $n = 2$. Нека $n = 2$. Да кажем, че играчите са Албена и Борис. БОО, нека Албена печели (което значи, че Борис губи). Твърдението е вярно, като Албена е X. ✓

Индуктивно предположение. Да допуснем, че твърдението е вярно за някое n. С други думи, допускаме, че в турнир n участници, в който в който всеки два участника играят точно една партия помежду си и във всяка партия има победител, такъв X има, както и да са завършили партиите.

Индуктивна стъпка. Разглеждаме турнир T с $n+1$ участници, в който в който всеки два участника играят точно една партия помежду си и във всяка партия има победител.

Фиксираме един участник. Да кажем, Яна. Да си представим партиите, в които Яна не участва. Но това е турнир T' с n участници, в който всеки два участника играят точно една партия помежду си и във всяка партия има победител. Съгласно индуктивното предположение, в T' има участник X, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от X или Y е загубил от някой, който е загубил от X. Забележете, че не се твърди, че X е победител в смисъл, че X само е печелил! Множеството от участниците в T' се разделя на три дяла:

- $\{X\}$,
- множеството L от тези, които за загубили от X,
- множеството W от тези, които от които X е загубил. Очевидно е, че всеки от W е загубил от някой от L, за да бъде изпълнено условието за X.

Това не е непременно разбиване съгласно формалната дефиниция, понеже или L, или W може да е празно (но не и двете!), затова и терминът е "разделя", а не "разбива".

Сега да върнем партиите на Яна в турнира, получавайки T. Следните три възможности са изчерпателни.

- Яна е загубила от X. Тогава добавяма Яна към L. Забелязваме, че X продължава да е играч, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от X или Y е загубил от някой, който е загубил от X.
- X е загубил от Яна, но Яна е загубила от играч от L. Тогава добавяме Яна към W. Забелязваме, че X продължава да е играч, такъв че за всеки друг участник Y, Y е загубил от X или Y е загубил от някой, който е загубил от X.
- X е загубил от Яна и Яна не е губила партия от никой играч от L. Да разгледаме произволен участник Z, който не е Яна.
  - Ако $Z = X$, то Z е загубил от Яна.
  - Нека $Z \in L$. Знаем, че всеки двама участници са играли, така че Яна е играла със Z. Знаем, че всяка игра е имала победител Заключаваме, че Яна спечелила срещу Z. С други думи, Z е загубил от Яна.
  - Нека $Z \in W$. Знаем, че Z е загубил от някой от L. Заключаваме, че Z е загубил от някой, който е загубил от Яна.

  В такъв случай Яна става "новият X", а X отива в L. Вече показахме, че Яна е играч, такъв че за всеки друг участник е загубил от Яна или е загубил от някой, който е загубил от Яна.

Доказахме твърдението. $\square$

Задача 19. Функцията $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана така:

$$f(m,n) = \begin{cases} n+1, & \text{ако } m = 0 \\ f(m-1, 1), & \text{ако } m > 0 \text{ и } n = 0 \\ f(m-1, f(m, n-1)), & \text{ако } m > 0 \text{ и } n > 0 \end{cases}$$

- Пресметнете $f(1,3)$.
- Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(1,n) = n+2$.
- Пресметнете $f(2,3)$.
- Докажете, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(2,n) = 2n+3$.

Решение. Тази функция е известна като функцията на Ackermann. Да пресметнем $f(1,3)$.

$$\begin{aligned} f(1,3) &= f(0, f(1,2)) \\ f(1,2) &= f(0, f(1,1)) \\ f(1,1) &= f(0, f(1,0)) \\ f(1,0) &= f(0,1) = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} f(1,1) &= f(0,2) = 3 \\ f(1,2) &= f(0,3) = 4 \\ f(1,3) &= f(0,4) = 5 \end{aligned}$$

Отговорът е 5.

Ще докажем, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(1,n) = n+2$ с индукция по n.

Базата е $n = 0$. Трябва да покажем, че $f(1,0) = 0+2$. От една страна, $f(1,0) = 2$, както вече изведохме, а от друга страна, $0+2 = 2$. ✓

Индукнивното предположение е, че $f(1,n) = n+2$ за някое естествено n.

Въз основа на индуктивното предположение ще докажем, че $f(1,n+1) = n+3$. По определение, $f(1,n+1) = f(0, f(1, n+1-1))$, тоест, $f(1,n+1) = f(0, f(1,n))$. Но от индуктивното предположение имаме $f(1,n) = n+2$. Тогава $f(1,n+1) = f(0,n+2)$. По определение, това е $n+2+1 = n+3$. ✓

Да пресметнем $f(2,3)$.

$$\begin{aligned} f(2,3) &= f(1, f(2,2)) \\ f(2,2) &= f(1, f(2,1)) \\ f(2,1) &= f(1, f(2,0)) \\ f(2,0) &= f(1,1) \end{aligned}$$

Но $f(1,1) = 3$, както вече видяхме. Тогава $f(2,1) = f(1,3)$, което е $3+2 = 5$. Тогава $f(2,2) = f(1,5)$, което е $5+2 = 7$. Тогава $f(2,3) = f(1,7)$, което е $7+2 = 9$. Отговорът е 9.

Ще докажем, че $\forall n \in \mathbb{N} : f(2,n) = 2n+3$ с индукция по n.

Базата е $n = 0$. Трябва да покажем, че $f(2,0) = 2 \cdot 0 + 3$. От една страна, $f(2,0) = f(1,1)$ по определение, а $f(1,1) = 3$, както вече видяхме. От друга страна, $2 \cdot 0 + 3 = 3$. ✓

Индукнивното предположение е, че $f(2,n) = 2n + 3$ за някое естествено n.

Въз основа на индуктивното предположение ще докажем, че $f(2,n+1) = 2(n+1)+3$, тоест, че $f(2,n+1) = 2n+5$. По определение, $f(2,n+1) = f(1, f(2, n+1-1))$, тоест, $f(2,n+1) = f(1,f(2,n))$. Но от индуктивното предположение имаме $f(2,n) = 2n+3$. Тогава $f(2,n+1) = f(1,2n+3)$. Но, както вече доказахме, $f(1,2n+3) = 2n+3+2$, което е $2n+5$. □

1.5 Невалидни доказателства по индукция

Задача 20. Разгледайте следното доказателство по индукция:

> *Ще докажем, че* $5n+3 = 5(n-2)+8$ *за всяко естествено число* n. *Да допуснем, че твърдението е вярно за някакво естествено* n. *Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента* $n+1$*:*
>
> $$\begin{gathered} 5(n+1)+3 = 5((n+1)-2)+8 \quad \leftrightarrow \quad 5n+5+3 = 5n+5-10+8 \quad \leftrightarrow \\ (5n+3)+5 = (5n-10+8)+5 \quad \leftrightarrow \quad (5n+3) = (5n-10+8) \quad \leftrightarrow \\ 5n+3 = 5(n-2)+8 \end{gathered}$$
>
> *Но последното равенство е именно индуктивното предположение и като такова е вярно. Следователно, твърдението е вярно за всяко естествено* n.

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение. Твърдението очевидно е невярно: отворете скобите вдясно и извадете $5n$ от двете страни. Щом твърдението е невярно, няма как доказателството да е валидно. Грешката в това "доказателство" е липсата на база. Наистина, ако се опитаме да разгледаме базов случай за някое конкретно естествено число n, ще получим невярно твърдение. □

Задача 21. Професор Дълбоков казва, че разполага с доказателство, че ако m и n са естествени числа, то $m = n$. Функцията max се дефинира по класическата дефиниция: за всеки $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\max(m,n) = \begin{cases} m, & \text{ако } m \geq n \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Нека $P(t)$ е следният предикат с домейн $\mathbb{N}$:

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \big((\max(m,n) = t) \ \rightarrow (m = n)\big)$$

Професорът доказва $P(t)$ с индукция по t. Базовият случай е $t = 0$ и наистина $P(0)$ е очевидно вярно. Индуктивното предположение е, че $P(t)$ е истина за някакво t. Разглеждаме $P(t+1)$. Нека $\max(m,n) = t+1$. Нека $m' = m-1$ и $n' = n-1$. Но тогава очевидно $\max(m',n') = t$. От това и индуктивното предположение следва, че $m' = n'$. Щом $m' = n'$, в сила е $m = n$. В заключение, $P(t)$ е истина за всяко естествено t.

Обяснете защо това доказателство е невалидно.

Решение. Проблемът е в индуктивното предположение. Професорът удобно е пропуснал да каже експлицитно кое е множеството X, от което взема стойности t в предположението. Тъй като базата е за стойност на аргумента 0, трябва 0 да е елемент на X. Но вижте как става в индуктивната стъпка, ако $t = 0$.

И така, разглеждаме индуктивната стъпка от доказателството на професора при $t = 0$. Разглеждаме $P(0+1)$, което е $P(1)$. Професорът казва "Нека $\max(m, n) = 0 + 1$. Нека $m' = m - 1$ и $n' = n - 1$." За m и n знаем, че са произволни естествени числа. Обаче m' може да не е естествено число: ако $m = 0$, $m' = 0 - 1 = -1$, а -1 не е естествено число. Ерго, не може да ползваме индуктивното предположение. Индуктивното предположение е в сила **само за естествени** m и n. Оттук твърдението, че $m' = n'$, не е непременно вярно. И доказателството дерайлира.

Показахме, че доказателството на професора е невалидно. Заслужава си да поразсъждаваме още. Първо нека се убедим, че ако доказателството на професора беше валидно, щеше да следва $\boxed{\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : m = n}$. Предикатът P е едноместен, понеже променливите m и n са под квантори. Със същия успех можеше да дефинираме предиката като триместен предикат

$$Q(m, n, t) \;:=\; \big((\max(m, n) = t) \;\to (m = n)\big)$$

Твърдим, че **ако**

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall t \in \mathbb{N} : Q(m, n, t)$$

е истина, **то**

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : m = n$$

е истина. За целта да разгледаме дори по-общ триместен предикат

$$S(m, n, t) \;:=\; \big((f(m, n) = t) \;\to (m \sim n)\big)$$

където f е произволна функция на две променлини $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, а $\sim$ е произволна релация над $\mathbb{N}$. Твърдим, че **ако**

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall t \in \mathbb{N} : S(m, n, t) \tag{11}$$

е истина, **то**

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : m \sim n$$

е истина. Преди да докажем това, да видим, че Q е частен случай на S, в който функцията f е $\max$, а релацията $\sim$ е $=$; ерго, невалидността на доказателството на професора не е заради някакви особености на максимума или на равенството! И така, нека (11) е истина. f е функция, което означава "тотална функция". Ерго, за всеки две естествени m и n съществува точна една функционална стойност $f(m, n)$, която е естествено число. За доказателството ни е важно да има **поне една** такава функционална стойност; че е точно една, не е съществено. И така, за всеки две естествени m и n съществува естествено число $f(m, n)$. Разглеждаме импликацията

$$(f(m, n) = t) \;\to (m \sim n)$$

по отношение на произволни фиксирани m и n, но за всяко t (t не е фиксирано в тези разсъждения). За тези стойности на t, за които $f(m, n)$ е различна от t, импликацията е истина, понеже антецедентът е лъжа. Но има стойност на t, за която $f(m, n) = t$. За тази стойност на t, антецедентът е истина, така че трябва консеквентът да е истина! Показахме, че за произволни m и n е вярно, че $m \sim n$. Но същото можем да запишем кратко като

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : m \sim n$$

И така, без съмнение, ако доказателството на професора беше валидно, щеше да следва, че всеки две естествени числа са равни; с други думи казано, че има само едно естествено число. Това, разбира се, не е вярно. От друга страна обаче, откритието, че твърдението е невярно, **не решава задачата**. В условието на тази задача има предложено конкретно доказателство и трябва да се каже защо **това** доказателство е невалидно. В **него** трябва да се открие коя стъпка е "проблематична" в смисъл, че следващата не следва от нея. За да решим задачата, не е достатъчно да разглеждаме семантичното ниво (твърдението на професора е лъжа), а трябва да открием грешката в синтактичното ниво (индуктивната стъпка не следва от индуктивното предположение). □

2 Силна индукция

Задача 22. Докажете, че ако разполагаме с неограничени количества от пощенски марки от 4 стотинки и 5 стотинки, то с тях можем да постигнем произволна сума равна на или надхвърляща 12 стотинки.

Решение. Твърди се, че за всяка зададена цена над или равна на 12 стотинки можем да изберем марки измежду дадените, чиято сума от цени е равна на зададената. Например, за да постигнем 12 стотинки вземаме три марки по 4 стотинки, за да постигнем 13 стотинки вземаме две по 4 стотинки и една от 5 стотинки, и така нататък. Ще докажем твърдението със силна индукция.

База: Ще използваме четири базови случая, понеже шаблонът на създаване на произволна цена се повтаря през четири единици. Ако зададената цена е 12, то $12 = 3 \times 4 + 0 \times 5$. Ако е 13, то $13 = 2 \times 4 + 1 \times 5$. Ако е 14, то $14 = 1 \times 4 + 2 \times 5$. Ако е 15, то $15 = 0 \times 4 + 3 \times 5$.

Индуктивно предположение: Да допуснем, че за някое $n \geq 15$, за всяко $k \in \{12, 13, \ldots, n\}$ можем да изберем марки със сумарна цена k стотинки. Щом $n \geq 15$, в сила е $|\{12, 13, \ldots, n\}| \geq 4$, така че индуктивното предположение е за поне четири последователни стойности.

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че може да изберем марки със сумарна цена $n+1$ стотинки. Тъй като $n+1 \geq 16$, в сила е $(n+1)-4 \geq 12$, откъдето $(n+1)-4 \in \{12, 13, \ldots, n\}$. Следователно, индуктивното предположение е в сила за стойност на аргумента $(n+1)-4$, така че можем да изберем марки със сумарна цена $(n+1)-4$ стотинки. Добавяйки една марка от 4 стотинки, получаваме марки със сумарна цена $n+1$ стотинки. □

Задача 23. Играта *Nim* има разновидности, една от които ще разгледаме тук. Дадени са две купчини от някакви неща, да кажем камъчета. Камъчетата са неразличими. Играта се играе от двама играчи, които се редуват – всеки играч, когато е неговият или нейният ред, взема няколко камъчета, поне едно, от една от купчините (но не може да вземе и от двете купчини). Печели играчът, който вземе последен. Докажете, че ако в началния момент двете купчини съдържат еднакъв брой камъчета, то съществува печеливша стратегия за втория играч. С други думи, той или тя задължително печели, ако играе оптимално.

Решение. Нека всяка купчина съдържа точно n камъчета. Ще докажем твърдението със силна индукция по n. Базовият случай е за $n = 1$. Тогава първият играч може да направи само едно нещо – да вземе единственото камъче от някоя от купчините, няма значение коя. Тогава вторият взема единственото камъче от другата купчина и печели. ✓

Да допуснем, че за някое цяло положително n и всяко $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ е вярно, че има стратегия, с която вторият играч печели, ако във всяка купчина има точно k камъчета. Да разгледаме игра с две купчини, всяка с по $n+1$ камъчета. Първият играч е длъжен да вземе j камъчета от някоя купчина. Тогава вторият играч разполага с две купчини, едната от които съдържа $n + 1 - j$ камъчета, а другата, $n + 1$ камъчета. Ако $j = n + 1$, тоест ако едната купчина е празна, очевидно вторият играч печели, вземайки всички камъчета от другата купчина. В противен случай вторият играч може да вземе точно j камъчета от купчината с $n + 1$ камъчета и по този начин отново играта е в състояние, при което двете купчини имат по един и същи брой камъчета, а именно $n + 1 - j$. Съгласно индуктивното предположение, вторият печели в тази ситуация. □

Задача 24. Представете си игра с един играч (*solitaire*). Дадени са n монети. Номиналите на монетите са без значение. Монетите са наредени вертикално в една купчина. На всеки ход, играчът избира една купчина, имаща повече от една монета, и разбива тази купчина на две произволни непразни купчини. При това получава печалба, равна на произведението от броя на монетите в тези две купчини. Примерно, ако играчът избере купчина с 11 монети и я разбие на една купчина с 6 монети и друга с 5 монети, печалбата е $5 \times 6 = 30$. Играта завършва, когато всяка купчина съдържа точно една монета. Печалбата в цялата игра е сумата от печалбите от всички разбивания.

Докажете по индукция, че печалбата винаги е $\binom{n}{2}$ **независимо** от това как точно играе играчът.

Решение. Ще докажем твърдението със силна индукция по n. За по-ясно изложение ще записваме биномния коефициент като $\frac{n(n-1)}{2}$.

Базата е $n = 1$. От една страна, играчът няма възможен ход и играта приключва с печалба 0. От друга страна, $\frac{n(n-1)}{2}$ е 0 при $n = 1$. ✓

Индуктивното предположение е следното: за някое цяло положително n е вярно, че за всяко $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ е вярно, че игра, започваща с една купчина от m монети, дава печалба $\frac{m(m-1)}{2}$ независимо от конкретните ходове.

В индуктивната стъпка разглеждаме игра, започваща с една купчина от n монети. Ако $n > 1$, играчът избира някое $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ и с първия си ход разбива купчината на една купчина с m монети и друга с $n - m$ монети. Печалбата от този ход е $m(n - m)$. Но $m < n$ и $n - m < n$, така че прилагаме индуктивното предположение за двете купчини и заключаваме, че печалбите са съответно $\frac{m(m-1)}{2}$ и $\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$. Тогава сумарната печалба е

$$
\begin{aligned}
& m(n-m) + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} = \\
& \frac{2mn - 2m^2 + m^2 - m + n^2 - mn - n - mn + m^2 + m}{2} = \\
& \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

Което и трябваше да докажем. □

Задача 25. Докажете по индукция, че 10 дели $n^5 - n$ за всяко естествено n.

Решение Ще докажем твърдението със силна индукция по n.

База: $n = 0$. Твърдението става "10 дели $0^5 - 0$", което очевидно е вярно. ✓

Индуктивно предположение: Да допуснем, че твърдението е вярно за стойности на аргумента $0, 1, \ldots, n-1, n$, за някое $n \in \mathbb{N}$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че 10 дели $(n+1)^5 - (n+1)$. В сила е

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^5 - (n+1) = ((n-1)+2)^5 - ((n-1)+2) = \\
&(n-1)^5 + 10(n-1)^4 + 40(n-1)^3 + 80(n-1)^2 + 80(n-1) + 32 - (n-1) - 2 = \\
&((n-1)^5 - (n-1)) + 10(n-1)^4 + 40(n-1)^3 + 80(n-1)^2 + 80(n-1) + 30 = \\
&((n-1)^5 - (n-1)) + 10((n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Но от индуктивното предположение знаем, че 10 дели $(n-1)^5 - (n-1)$, така че имаме право да запишем $(n-1)^5 - (n-1)$ като $10m$, където m е някое естествено число. Тогава преписваме (12) така:

$$
\begin{aligned}
&10m + 10((n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3) = \\
&10(m + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3)
\end{aligned}
$$

Но $m + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3$ е цяло число, така че $10(m + (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 8(n-1)^2 + 8(n-1) + 3)$ е кратно на 10. Доказахме, че 10 дели $(n+1)^5 - (n+1)$. □

Една забележка към доказателството на Задача 25. Строго формално, доказателството в този вид е непълно. Да кажем, че предикатът, който доказваме, е $Q(\,)$. *В индуктивната стъпка доказваме* $Q(n+1)$, *използвайки допускането* $Q(n-1)$. *Но това допускане е едно от допусканията* $Q(0)$, $Q(1)$, …, $Q(n-1)$, $Q(n)$. *Ерго,* $n-1$ *трябва да е елемент на* $\{0, 1, \ldots, n\}$. *Това, което знаем за е, че* n *е естествено число. Но* 0 *е естествено число, така че е възможно* $n = 0$. *И имаме проблем: ако* $n = 0$, $n-1$ *не е естествено число и съответно нямаме* $Q(n-1)$ *като допускане.*

Изход от това е да докажем втора база за $n = 1$, *което е елементарно, понеже очевидно 10 дели* $1^5 - 1 = 0$, *след което допусканията са* $Q(1)$, $Q(2)$, …, $Q(n-1)$, $Q(n)$, *като* $n \in \mathbb{N}^+$, *и пак доказваме* $Q(n+1)$, *ползвайки допускането* $Q(n-1)$.

Този проблем, изискващ добавяне на втора база, се появява, защото в индуктивната стъпка предикатът със стойност на аргумента $n+1$ *се доказва чрез допускане за стойност на аргумента* $n-1$, *което дава разлика 2 между тези стойности* $(n+1-(n-1) = 2)$. *Въпросният проблем не се появи в задачите, които вече решихме със силна индукция. Да видим защо.*

- *В Задача 22 базата се състои от 4 съждения за 4 последователни стойности на аргумента. В индуктивната стъпка доказателството за* $n+1$ *почива на допускане за* $n-3$, *което дава разлика 4, а ние предвидливо се доказали 4 бази за 4 последователни стойности на аргумента, така че множеството от базите не може да бъде "прескочено" с изваждане на 4.*
- *В Задача 23 базата е от едно единствено съждение (за стойност на аргумента 1), но това стига. Индуктивното предположение е за стойност на аргумента от множеството* $\{1, \ldots, n\}$, *което винаги съдържа единицата. В индуктивната стъпка доказателството е за стойност на аргумента* $n+1$ *почива на допускане за стойност на аргумента от* $\{1, \ldots, n\}$. *Ерго, не е възможност да се опитаме да ползваме предиката със стойност на аргумента, по-малка от 1.*

- *Аналогичният коментар е в сила и за Задача 24.*

Задача 26. Представете си игра, в която се редуват двама играчи А и Б. На масата са n сложени камъчета, които за целите на играта са идентични, и всеки играч, когато е неговият или нейният ред, взема или едно, или две, или три камъчета. Камъче, което е взето, повече не се връща на масата. Играчът, който/която вземе последен/последна, губи. Първо играе А. Докажете със силна индукция по n, че има печеливша стратегия за А тогава и само тогава, когато $n \not\equiv 1 \pmod 4$.

Решение. Преди да разгледаме решението, да направим разяснение на смисъла на понятието *печеливша стратегия*. Да има печеливша стратегия за А означава А да спечели, ако играе оптимално. Да няма печеливша стратегия за А означава А да загуби, както и да играе, стига Б да играе оптимално. Тъй като в тази игра няма възможност за равен резултат,

- ако има печеливша стратегия за А и А играе оптимално, то Б губи задължително, както и да играе,
- ако няма печеливша стратегия за А, то Б печели задължително, ако играе оптимално.

Съществуването или несъществуването на печеливша стратегия за А може да се опише с алтернираща редица от квантори. Да съществува печеливша стратегия за А означава да **съществува** ход за А, такъв че **за всеки** ход-отговор на Б **съществува** ход за А, такъв че **за всеки** ход-отговор на Б ... и така нататък ... **за всеки** ход на Б, Б губи директно. В други игри, примерно шахът, тази редица завършва на "**съществува** ход на А, с който А печели директно", но в тази задача играта е такава, че А печели тстк Б вземе последен/последна, така че А не може да спечели директно. Редицата от квантори започва така:

$$\exists \, \forall \, \exists \, \forall \, \cdots$$

Лесно се вижда, че да не съществува печеливша стратегия за А е отрицанието на горния израз, а именно, **за всеки** ход на А **съществува** ход-отговор на Б, такъв че **за всеки** ход на А **съществува** ход-отговор на Б, ... и така нататък ... **за всеки** ход на А, А губи директно. Редицата от кванторите започва така:

$$\forall \, \exists \, \forall \, \exists \, \cdots$$

Тъй като камъчетата са идентични, единственото, което има значение в даден момент, е техният брой. За всяко n можем да дефинираме, че n е печелившо, ако има печеливша стратегия за А при n камъчета в началото, а n е губещо, ако няма печеливша стратегия за А при n камъчета в началото. Лесно се вижда, че $n = 1$ е губещо. $n = 2$ обаче е печелившо, защото А може да вземе едно камъче и да принуди Б да вземе последен/последна. С други думи, А може да наложи на Б губещата (от гледна точка на Б) ситуация с $n = 1$. Аналогично, $n = 3$ и $n = 4$ са печеливши (за А). Но $n = 5$ е губещо, защото А не може да вземе повече от три камъчета, така че, колкото и да вземе А в началото, Б може да "вкара" А в губещата ситуация с едно камъче. И така, $n = 1$ и $n = 5$ са губещи. Иска се да докажете, че $n = 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$ са точно губещите (за А) бройки.

Ето едно решение на Задача 26. Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Нека $P(n)$ е следният предикат:

> В игра с n камъчета, ако $n = 4m + 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$, то няма печеливша стратегия за играча, който/която е на ход, в противен случай има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход.

Ще докажем $P(n)$ със силна индукция по n.

База: $n = 1$. От една страна, очевидно ситуацията с едно единствено налично камъче е губеща за този, който е на ход. От друга страна, тъй като 1 е от вида $4m + 1$, предикатът казва, че няма печеливша стратегия за този играч. ✓

Индуктивно предположение: Да допуснем $P(k)$ за $1 \leq k \leq n$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем $P(n + 1)$. Разглеждаме четири случаи.

- Нека $n + 1$ е от вида $4m$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава А взема точно 3 камъчета и Б е на ход с $4m - 3$ камъчета. Тъй като n е поне 4, числото $4m - 3$ е поне 1 и е от вида $4k + 1$ за някое естествено k. От индуктивното предположение знаем, че тази ситуация е губеща за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е губеща за Б, което означава, че е печеливша за А.

- Нека $n + 1$ е от вида $4m + 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Вече разгледахме случая с аргумент 1, така че можем да допуснем $n + 1 \geq 5$. А може да вземе или едно, или две, или три камъчета.
  - Ако А вземе едно камъче, остават n камъчета за Б. Но $n = 4m$ в текущия контекст. От индуктивното предположение знаем, че при $4m$ камъчета има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е печеливша за Б, което означава, че е губеща за А.
  - Ако А вземе две камъчета, остават $n - 1$ камъчета за Б. Но $n - 1 = 4m - 1$ в текущия контекст. Тъй като n е поне 4, числото $n - 1 = 4m - 1$ е поне 3 и е от вида $4k + 3$ за някое естествено k. От индуктивното предположение знаем, че при $4k + 3$ камъчета има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е печеливша за Б, което означава, че е губеща за А.
  - Ако А вземе три камъчета, остават $n - 2$ камъчета за Б. Но $n - 2 = 4m - 2$ в текущия контекст. Тъй като n е поне 4, числото $n - 2 = 4m - 2$ е поне 2 и е от вида $4k + 2$ за някое естествено k. От индуктивното предположение знаем, че при $4k + 2$ камъчета има печеливша стратегия за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е печеливша за Б, което означава, че е губеща за А.

- Нека $n + 1$ е от вида $4m + 2$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава А взема точно 1 камъче и Б играе с $4m + 1$ камъчета. От индуктивното предположение знаем, че тази ситуация е губеща за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е губеща за Б, което означава, че е печеливша за А.

- Нека $n + 1$ е от вида $4m + 3$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава А взема точно 2 камъчета и Б играе с $4m + 1$ камъчета. От индуктивното предположение знаем, че тази ситуация е губеща за играча, който/която е на ход. Следователно, ситуацията е губеща за Б, което означава, че е печеливша за А. □

Задача 27. Нека α е константа. Нека $u_0 = 1$ и $u_1 = \cos(\alpha)$. Нека $u_n = 2u_1u_{n-1} - u_{n-2}$ за $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е вярно, че $u_n = \cos(n\alpha)$.

Решение. Нека U е индуктивно дефинираното множество $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$. Трябва да докажем $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$, където $P(n)$ е предикатът $\boxed{u_n = \cos(n\alpha)}$. Ще използваме силна индукция.

В базата на u има точно два елемента, а именно u_0 и u_1. Затова доказателството трябва да има база, проверяваща верността на предиката върху всеки от тях.

База: $P(0)$ е $\boxed{u_0 = \cos(0\alpha)}$. Но лявата страна, а именно u_0, е 1 по условие, а дясната страна е 1, защото $\cos 0 = 1$. Щом лямата и дясната страна са равни, $P(0)$ е истина. ✓

$P(1)$ е $\boxed{u_1 = \cos(1\alpha)}$. Но лявата страна, а именно u_1, е $\cos\alpha$ по условие, а дясната страна е $\cos\alpha$, защото $\cos 1\alpha = \cos\alpha$. Щом лявата и дясната страна са равни, $P(1)$ е истина. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че за някое $n \in \mathbb{N}$, съжденията $P(0), \ldots, P(n+1)$ са верни. В частност, за доказателството ни трябват само $P(n)$ и $P(n+1)$:

$$\begin{aligned} u_n &= \cos(n\alpha) \\ u_{n+1} &= \cos((n+1)\alpha) \end{aligned}$$

Индуктивна стъпка: Трябва да докажем, че

$$u_{n+2} = \cos((n+2)\alpha), \tag{13}$$

използвайки индуктивните предположения. Ще ползваме и тъждествата

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{14}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \tag{15}$$

От (14), заместваийки a с α и b с $(n+1)\alpha$, получаваме

$$\cos(\alpha + (n+1)\alpha) = \cos\alpha \cos(n+1)\alpha - \sin\alpha \sin(n+1)\alpha \tag{16}$$

От (15), заместваийки a с $(n+1)\alpha$ и b с α, получаваме

$$\cos((n+1)\alpha - \alpha) = \cos(n+1)\alpha \cos\alpha + \sin(n+1)\alpha \sin\alpha \tag{17}$$

Използвайки дефиницията на u_{n+2}, имаме

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_1u_{n+1} - u_n \quad \text{// прилагаме индуктивните предположения и дефиницията на } u_1 \\ &= 2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \\ &= \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) + \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \quad \text{// от (16)} \\ &= \cos(\alpha + (n+1)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \\ &= \cos((n+2)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) \quad \text{// от (17)} \\ &= \cos((n+2)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos((n+1)\alpha - \alpha) - \sin(n+1)\alpha\sin\alpha - \cos(n\alpha) \\ &= \cos((n+2)\alpha) + \sin\alpha\sin(n+1)\alpha + \cos(n\alpha) - \sin(n+1)\alpha\sin\alpha - \cos(n\alpha) \\ &= \cos((n+2)\alpha) \end{aligned}$$

Доказахме (13). □

Задача 28. Нека $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Докажете, че $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ще докажем твърдението със силна индукция по n.

База: Базовите случаи са $n = 0$ и $n = 1$. За $n = 0$, твърдението е, че $x^0 + \frac{1}{x^0}$ е цяло число. Тъй като $x \neq 0$, $x^0 = 1$, така че $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$, което, без съмнение, е цяло число. За $n = 1$, твърдението е, че $x^1 + \frac{1}{x^1}$ е цяло число, което е вярно по условие. ✓

Индуктивно предположение: До допуснем, че за някое $n \in \mathbb{N}$ е вярно, че $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$, за всяко $k \in \{0, 2, \ldots, n-1\}$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$. За целта ще разгледаме произведението

$$X = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) \tag{18}$$

Съгласно индуктивното предположение, $\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right)$ е цяло число. По условие, $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ е цяло число. Произведението на цели числа е цяло число, следователно X е цяло число. Да отворим скобите. Тогава

$$\begin{aligned} X &= x^{n-1} \cdot x + x^{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{n-1}} \cdot x + \frac{1}{x^{n-1}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^n + x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \\ &= \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \end{aligned}$$

Но тогава

$$x^n + \frac{1}{x^n} = X - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) \tag{19}$$

Както знаем, X е цяло число, а $\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$ е цяло число от индуктивното предположение. Тогава дясната страна на (19) е цяло число, откъдето следва, че $x^n + \frac{1}{x^n}$ е цяло число. □

3 Засилване на твърдението, което доказваме

Възможно е да правим доказателство по индукция и то (доказателството) да "не се получи", въпреки че твърдението, което искаме да докажем, е вярно. В такъв случай може да опитаме една техника: да докажем по индукция твърдение, което е по-силно от това, което ни е дадено. По принцип по-силните твърдения се доказват по-трудно, но в някои случаи—колкото и парадоксално да звучи—по-силните твърдения се доказват по-лесно, ако ползваме индукция.

Задача 29. Докажете, че

$$\text{За всяко } n \geq 1: \; \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \tag{20}$$

Решение, първи опит:

База: Нека $n = 1$. Лявата страна е $\frac{1}{2}$, а дясната е $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Действително лявата страна е по-малка от дясната. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност на аргумента n.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. За тази стойност, твърдението е

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}}_{A} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}} \tag{21}$$

Съгласно индуктивното предположение, изразът, означен с A, е по-малък от $\frac{1}{\sqrt{3n}}$. Прилагайки това към лявата страна на неравенство (21), получаваме

$$A \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Дали обаче

$$\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$$

С тривиална алгебра се убеждаваме, че не е вярно:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}} && \leftrightarrow \\
\frac{2n+1}{2n+2} &< \sqrt{\frac{n}{n+1}} && \leftrightarrow \\
\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} &< \frac{n}{n+1} && \leftrightarrow \\
4n^3+4n^2+4n+4n^2+4n+1 &< 4n^3+8n^2+4n && \leftrightarrow \\
4n+1 &< 0 && \text{✗}
\end{aligned}$$

Провалът на доказателството *не означава*, че твърдението е невярно, а само че не сме успели да го докажем *по този начин*.

Решение, втори опит: Ще докажем по индукция следното твърдение

$$\text{За всяко } n \geq 2: \; \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \tag{22}$$

База: Нека $n = 2$. Лявата страна е $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, а дясната е $\frac{1}{\sqrt{7}}$. Действително лявата страна е по-малка от дясната. Базовият случай е доказан.

Индуктивно предположение: Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност на аргумента n.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. За тази стойност, твърдението е

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}}_{A} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} \tag{23}$$

Съгласно индуктивното предположение, изразът, означен с A, е по-малък от $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Прилагайки това към лявата страна на неравенство (23), получаваме

$$A \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Остава да докажем, че

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Действително,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{3n+4}} & \leftrightarrow \\
\frac{2n+1}{2n+2} &< \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} & \leftrightarrow \\
\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} &< \frac{3n+1}{3n+4} & \leftrightarrow \\
12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4 &< 12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4 & \leftrightarrow \\
19n &< 20n
\end{aligned}
$$

С това доказателството на (22) приключва. Формално, твърдение (22) не влече твърдение (20), защото (22) е за $n \geq 2$. Но лесно се вижда, че (22) заедно с доказателството на (20) за $n = 1$ са по-силно твърдение от (20). □

Едно интуитивно обяснение защо техниката със засилване на твърдението (понякога) работи е, че доказателство по индукция прилича на катерене по стълба: ние стъпваме на индуктивното предположение и се "качваме" едно ниво нагоре, доказвайки индуктивната стъпка. При по-силно твърдение стъпалото, от което тръгваме, е по-високо.

Забележете, че техниката със засилване на твърдението *е съвсем различно нещо* от доказателство със силна индукция!

Задача 30. Докажете по индукция по n, че за всяко цяло положително n е в сила

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$$

Решение: Не можем да докажем твърдението в този вид, въпреки че е вярно, понеже от факта, че $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$, не следва директно $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < 2$, тъй като $\frac{1}{(n+1)^2}$ е положително.
Ще докажем по-силно твърдение:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Да кажем, че $P(k)$ е предикатът

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

с домейн множеството от целите положителни числа. Иска се да докажем $\forall \in \mathbb{N}^+ : P(n)$.

База: Ще докажем $P(1)$. Но $P(1)$ е $\frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$, което очевидно е вярно. ✓

Индуктивно предположение: Допускаме, че за някое $n \geq 1$ е вярно $P(n)$. С други думи, допускаме, че

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

за някое цяло положително n.

Индуктивна стъпка: Ще докажем $P(n+1)$. За целта първо ще докажем едно помощно твърдение: $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$.

Очевидно вярно е

$$n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$$

Но това е същото като

$$n^2 + 2n \leq (n+1)^2$$

Тъй като n е положително,

$$\begin{aligned} &\frac{n+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} \leftrightarrow \\ &\frac{n+1+1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} \leftrightarrow \\ &\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{24}$$

Доказахме, че $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Връщаме се на доказателството на $P(n+1)$. Индуктивното предположение е:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

което е същото като

$$\frac{1}{n} \leq 2 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

Предвид (24), в сила е

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \leq 2 - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

което е същото като

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Но това е точно $P(n+1)$, което и трябваше да докажем. ✓

4 Структурна индукция

Задача 31. Нека $\Sigma = \{0, 1\}$.

Определение 1. *Балансиран стринг* наричаме всеки стринг $x \in \Sigma^*$, който има еднакъв брой нули и единици.

Предложете индуктивна дефиниция на балансираните стрингове и докажете прецизно, че двете дефиниции са еквивалентни.

Решение: Следната дефиниция е индуктивна и е еквивалентна на Определение 1.

Определение 2. База. Празният стринг ϵ принадлежи на S.

Стъпка. Нека $x \in S$ и $y \in S$. Тогава

1. $0x1 \in S$,
2. $1x0 \in S$,
3. $xy \in S$.

Една вметка: само $0x1 \in S$ и $1x0 \in S$ не са достатъчни! Тези две правила генерират балансирани стрингове, ако x да е балансиран, но не генерират всички балансирани стрингове. Забележете, че те генерират само стрингове, чиито първа и последва буква са различни. Ерго, те не могат да генерират 1001, който без съмнение е балансиран.

Ето доказателство, че Определение 1 и Определение 2 са еквивалентни.

- В едната посока, ще докажем със силна (числена) индукция, че всеки s балансиран стринг съгласно Определение 1 може да бъде генериран от Определение 2.
  - В базовия случай на доказателството, $|s| = 0$. Тогава s е празният стринг, който се генерира от от базата на Определение 2.
  - Индуктивното предположение е, че за някакво четно $n \geq 2$, всеки балансиран стринг с дължина от 0 до $n - 2$ може да бъде генериран от Определение 2. Забележете, че всеки балансиран стринг има четна дължина, така че няма смисъл в предположението да включваме нечетни дължини като 1 или $n - 1$; това не би било формална грешка, просто няма смисъл.
  - В индуктивната стъпка на доказателството разглеждаме произволен балансиран стринг с дължина n. Следните случаи са взаимно изключващи се и изчерпателни.
    * Съществуват непразни балансирани стрингове s_1 и s_2 над Σ, такива че $s = s_1 s_2$.

      Примерно, $s = 1001010011$, $s_1 = 1001$ и $s_2 = 010011$.

      Очевидно $|s_1|$ и $|s_2|$ са четни и $|s_1| \leq n-2$ и $|s_2| \leq n-1$, така че и s_1, и s_2 може бъде генериран от Определение 2 съгласно предположението на доказтелството. Тогава s може да бъде генериран от (3) на стъпката на Определение 2.
    * Не съществуват такива s_1 и s_2.

      Примерно, $s = 110100$.

      Тъй като s е непразен, то s започва или с нула, или с единица. Ключовото наблюдение в този подслучай е, че първата и последната буква на s са различни.

      Първата и последната буква да са различни е необходимо, но не достатъчно условие s да няма факторизация на непразни балансирани подстрингове. Примерно, $s = 1010$ има различни първа и последна буква, но се факторизира на $s_1 = 10$ и $s_2 = 10$.

      Истинността на това ключово наблюдение се вижда веднага, ако съобразим, че в този подслучай (когато s няма нетривиална факторизация на балансирани подстрингове) всеки същински префикс на s е дебалансиран, като при това има излишък от този вид буква, с който започва; тогава само последната буква може да балансира целия s и тя трябва да е различна от първата буква.
      · Ако s започва с нула, той задължително завършва с единица. Щом s започва с нула и завършва с единица, той е от вида $0x1$, където x е балансиран стринг. Тогава s може да се генерира от (1) на стъпката.

  · Ако s започва с единица, той задължително завършва с нула. Щом s започва с единица и завършва с нула, той е от вида $1x0$, където x е балансиран стринг. Тогава s може да се генерира от (2) на стъпката.

- В другата посока, ще докажем със структурна индукция, че Определение 2 генерира само стрингове с еднакъв брой единици и нули. Това със сигурност е вярно за базовия случай: празният стринг има еднакъв брой нули и единици. В стъпката, при допускането, че и x, и y имат еднакъв брой нули и единици, очевидно всеки от стринговете $0x1$, $1x0$ и xy има еднакъв брой нули и единици. □