

3.5 Теорема на Гьодел за пълнота

Нека \mathcal{F} е формална система, съдържаща поне една константа. С $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ ще означаваме множеството от всички затворени термове на \mathcal{F} . В $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ въвеждаме релация \sim чрез

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{b} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Тъй като $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a}$ и $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c}$, то \sim е рефлексивна, симетрична и транзитивна релация и значи \sim е релация на еквивалентност. Стандартна структура за \mathcal{F} ще наричаме структурата $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$, където

- $|\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}| = \mathcal{C}_{\mathcal{F}} / \sim$.
- $\mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \equiv [\mathbf{fa}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ за всеки n -местен функционален \mathbf{f} на \mathcal{F} и $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.
- $\mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}} \equiv \{([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \mid \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n\}$ за всеки нелогически n -местен предикатен символ \mathbf{p} на \mathcal{F} и $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

За да се убедим, че интерпретацията на функционалните символи е коректна (т.е., че не зависи от избора на представител на класа на еквивалентност), нека разгледаме един n -местен функционален символ \mathbf{f} и нека $[\mathbf{a}_1] \equiv [\mathbf{b}_1], \dots, [\mathbf{a}_n] \equiv [\mathbf{b}_n]$. Тогава за $1 \leq i \leq n$ имаме $\mathbf{a}_i \sim \mathbf{b}_i$, т.е. $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$, откъдето съгласно теоремата за равенството $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{fa}_1 \dots \mathbf{a}_n = \mathbf{fb}_1 \dots \mathbf{b}_n$ и значи

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) &\equiv [\mathbf{fa}_1 \dots \mathbf{a}_n] \\ &\equiv [\mathbf{fb}_1 \dots \mathbf{b}_n] \equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{b}_1], \dots, [\mathbf{b}_n]). \end{aligned}$$

Лема 3.10. Нека \mathcal{F} е формална система с поне един нуламестен функционален символ. Тогава

- (i) $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) \equiv [\mathbf{a}]$ за всяко $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.
- (ii) $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$ за всяка затворена атомарна формула \mathbf{A} на \mathcal{F} .

Доказателство. За да докажем (i) нека $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Тогава $\mathbf{a} \equiv \mathbf{fa}_1 \dots \mathbf{a}_n$ за някой n -местен функционален символ \mathbf{f} на \mathcal{F} и термове $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Тъй като тези термове са получени преди \mathbf{a} можем да считаме, че за тях вече сме доказали $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_i) \equiv [\mathbf{a}_i]$, откъдето

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) &\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_n)) \\ &\equiv \mathbf{f}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \\ &\equiv [\mathbf{fa}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \\ &\equiv [\mathbf{a}]. \end{aligned}$$

За да докажем (ii) нека първо \mathbf{A} е $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, където $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Тогава, тъй като \mathbf{A} е затворена,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A} &\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \equiv \mathbb{T} \\ &\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}) \equiv \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{b}) \\ &\iff [\mathbf{a}] \equiv [\mathbf{b}] \\ &\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Нека сега \mathbf{A} е $\mathbf{pa}_1 \dots \mathbf{a}_n$ за някой нелогически n -местен предикатен символ \mathbf{p} на \mathcal{F} и $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Нека първо

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}.$$

Тогава

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T},$$

откъдето

$$(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_n)) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}$$

и значи

$$([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \in \mathbf{p}_{\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}}.$$

Оттук

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{pb}_1 \dots \mathbf{b}_n$$

за някои $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, такива че $[\mathbf{a}_i] \equiv [\mathbf{b}_i]$ за $1 \leq i \leq n$. Но тогава

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$$

за $1 \leq i \leq n$. Оттук и теоремата за равенството

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{p}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n,$$

т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}.$$

Обратно, нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$, т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{p}\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n.$$

Тогава

$$([\mathbf{a}_1], \dots, [\mathbf{a}_n]) \in \mathbf{p}\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$$

откъдето

$$(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_1), \dots, \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a}_n)) \in \mathbf{p}\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}$$

и значи

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}.$$

□

Дефиниция 3.11. Ще казваме, че една формална система е хенкинова, ако за всяка затворена формула $\exists \mathbf{x}\mathbf{A}$ на \mathcal{F} съществува константа (нуламестен функционален символ) c на \mathcal{F} , такава че

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists \mathbf{x}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{x}}[c].$$

Твърдение 3.12. Нека \mathcal{F} е пълна хенкинова формална система. Тогава за всяка затворена формула \mathbf{D} на \mathcal{F} е в сила

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D} \iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}.$$

В частност $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathcal{F}$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по построението на затворените формули на \mathcal{F} . Ако \mathbf{D} е атомарна формула, то твърдението следва от предната лема. Нека сега $\mathbf{D} \equiv \neg \mathbf{A}$. Тогава \mathbf{A} е затворена и предвид индукционното предположение и пълнотата на \mathcal{F} имаме

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D} &\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \not\models \mathbf{A} \\ &\iff \not\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \\ &\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Нека сега $\mathbf{D} \equiv \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$. Тогава \mathbf{A} и \mathbf{B} са затворени и предвид индукционното предположение и пълнотата на \mathcal{F} имаме

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D} &\iff \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A} \text{ или } \mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{B} \\ &\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A} \text{ или } \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{B} \\ &\iff \vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Накрая нека $\mathbf{D} \equiv \exists \mathbf{x}\mathbf{A}$. Нека първо $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{D}$, т.е.

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\exists \mathbf{x}\mathbf{A}) \equiv \mathbb{T}.$$

Тогава

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{i}_{[\mathbf{a}] }]) \equiv \mathbb{T}$$

за някое $\mathbf{a} \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Оттук и $[\mathbf{a}] \equiv \mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{a})$ получаваме

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}[\mathbf{a}]) \equiv \mathbb{T},$$

откъдето, съгласно индукционното предположение,

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_x[\mathbf{a}].$$

Оттук, аксиомата $\mathbf{A}_x[\mathbf{a}] \rightarrow \exists x\mathbf{A}$ и теоремата за тавтологиите

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}.$$

Обратно, нека $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{D}$, т.е.

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists x\mathbf{A}.$$

Тогава, предвид хенкиновостта на \mathcal{F} ,

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}_x[c]$$

за някоя константа c . Оттук и индукционното предположение

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_x[c]) \equiv \mathbb{T}.$$

Нека $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(c) \equiv \alpha$ ($\alpha \in |\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}|$). Тогава

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}}(\mathbf{A}_x[\mathbf{i}_{\alpha}]) \equiv \mathbb{T},$$

откъдето

$$\mathfrak{A} \models \mathbf{D}.$$

Сега, ако \mathbf{A} е нелогическа аксиома на \mathcal{F} , а \mathbf{A}' е универсално затваряне на \mathbf{A}' , имаме $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}'$, откъдето $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}'$ и значи $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathbf{A}$. Следователно $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}} \models \mathcal{F}$. □

Твърдение 3.13. Всяка формална система има консервативно хенкиново разширение.

Доказателство. Нека \mathcal{F} е формална система. Дефинираме специалните константи от ниво $n \geq 1$ за \mathcal{F} чрез следната индукция. Нека κ е символ, който не се съдържа в \mathcal{F} . Ако $\exists x\mathbf{A}$ е затворена формула на \mathcal{F} , то символът $\kappa_{\exists x\mathbf{A}}$ е специална константа от ниво 1, отнасяща се за $\exists x\mathbf{A}$. Нека сега $\exists x\mathbf{A}$ е затворена формула, съставена от символите на \mathcal{F} и специални константи от нива, по-малки или равни на n , и съдържаща поне една специална константа от ниво n . Тогава символът $\kappa_{\exists x\mathbf{A}}$ е специална константа от ниво $n+1$, отнасяща се за $\exists x\mathbf{A}$.

Ако $\kappa_{\exists x\mathbf{A}}$ е специална константа, то формулата

$$\exists x\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_x[\kappa_{\exists x\mathbf{A}}]$$

ще наричаме специална аксиома за $\kappa_{\exists x\mathbf{A}}$. Нека с \mathcal{F}' се получава от \mathcal{F} , добавяйки всички специални константи (от всички нива $n \geq 1$). Съгласно теоремата за константите, \mathcal{F}' е консервативно разширение на \mathcal{F} . Нека Γ е множеството от всички специални аксиоми. Ясно е, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е хенкинова формална система. Твърдим, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно разширение на \mathcal{F} .

Нека \mathbf{A} е формула на \mathcal{F} и нека $\vdash_{\mathcal{F}'[\Gamma]} \mathbf{A}$. Съгласно теоремата за редукцията (предвид това, че Γ е множество от затворени формули)

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A},$$

където $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ са специални аксиоми. Предвид теоремата за тавтологиите можем да считаме, че \mathbf{A}_1 се отнася за специална константа $\kappa_{\exists x\mathbf{A}}$ от възможно най-високо ниво. Тогава $\mathbf{A}_1 \equiv \exists x\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_x[\kappa_{\exists x\mathbf{A}}]$ и $\kappa_{\exists x\mathbf{A}}$ не се среща в нито една от формулите $\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ и \mathbf{A} . Тогава, съгласно теоремата за константите, ако y е нова променлива, то

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists x\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_x[y]) \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}$$

Оттук и (ПЗ) (тъй като y не участва във формулите $\mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ и \mathbf{A}) получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists y (\exists x\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_x[y]) \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}.$$

Съгласно пренексните операции (и тъй като y не участва в $\exists x\mathbf{A}$) имаме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \exists y (\exists x\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_x[y]) \leftrightarrow (\exists x\mathbf{A} \rightarrow \exists y\mathbf{A}_x[y]).$$

Оттук и теоремата за еквивалентната замяна

$$\vdash_{\mathcal{F}'} (\exists x\mathbf{A} \rightarrow \exists y\mathbf{A}_x[y]) \rightarrow \mathbf{A}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}.$$

Но $\exists y \mathbf{A}_x[y]$ е вариант на $\exists x \mathbf{A}$ и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}} \exists x \mathbf{A} \rightarrow \exists y \mathbf{A}_x[y].$$

Следователно

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{A}.$$

Повтаряйки това разсъждение още $n - 1$ пъти получаваме

$$\vdash_{\mathcal{F}'} \mathbf{A}$$

и значи

$$\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}.$$

Следователно $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е консервативно хенкиново разширение на \mathcal{F} . □

Теорема 3.14 (Теорема за пълнота (първи вариант)). Всяка непротиворечива формална система има модел.

Доказателство. Нека \mathcal{F} е непротиворечива формална система. Нека \mathcal{F}' е консервативно хенкиново разширение на \mathcal{F} . Тогава \mathcal{F}' е непротиворечива. Съгласно теоремата на Линденбаум \mathcal{F}' има пълно разширение \mathcal{F}'' (като при това $\mathcal{L}(\mathcal{F}'') \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}')$). Следователно \mathcal{F}'' е пълно хенкиново разширение на \mathcal{F} и значи

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''} \models \mathcal{F}''.$$

Нека \mathfrak{A} е обединяването на $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''}$ до $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Тогава, тъй като \mathcal{F}'' е разширение на \mathcal{F} , получаваме

$$\mathfrak{A} \models \mathcal{F}.$$

□

Теорема 3.15 (Теорема на Гьодел за пълнота). Нека \mathcal{F} е формална система и \mathbf{A} е формула на \mathcal{F} . Тогава, ако \mathbf{A} е вярна във всеки модел на \mathcal{F} , то $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$.

Доказателство. Нека \mathbf{A}' е универсално заговаряне на \mathbf{A} . Да допуснем, че $\not\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}'$. Тогава $\mathcal{F}[\neg \mathbf{A}']$ е непротиворечива и следователно $\mathcal{F}[\neg \mathbf{A}']$ има модел \mathfrak{A} . Тогава $\mathfrak{A} \models \mathcal{F}$ и съгласно условието $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}$. Тогава $\mathfrak{A} \models \mathbf{A}'$, което противоречи на $\mathfrak{A} \models \mathcal{F}[\mathbf{A}']$. Следователно $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}'$ и значи $\vdash_{\mathcal{F}} \mathbf{A}$. □