3.6 Теорема за компактност

Теорема 3.15 (Теорема за компактност)**.** Нека $\mathcal{F}$ е формална система и Γ е множество от формули на $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{F}[\Gamma]$ има модел тогава и само тогава, когато $\mathcal{F}[\Gamma']$ има модел за всяко крайно $\Gamma' \subseteq \Gamma$.

Доказателство. Посоката отляво-надясно е очевидна. За обратната посока нека предположим, че $\mathcal{F}[\Gamma]$ няма модел. Тогава съгласно теоремата за пълнота, $\mathcal{F}[\Gamma]$ е противоречива. Оттук и теоремата за редукцията за противоречивост

$$\vdash_{\mathcal{F}} \neg\mathbf{A}_1 \vee \cdots \vee \neg\mathbf{A}_k,$$

където $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ са универсални затваряния съответно на формулите $\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_k \in \Gamma$. Нека $\Gamma' = \{\mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_k\}$. Отново, предвид теоремата за редукцията за противоречивост, имаме $\mathcal{F}[\Gamma']$ е противоречива и следователно, съгласно теоремата за валидност, $\mathcal{F}[\Gamma']$ няма модел.

$\square$

3.7 Теорема на Льовенхайм-Скулем

Ще казваме, че един език от първи ред е краен, ако той съдържа само краен брой нелогически символи. Ще казваме, че езикът е изброим, ако той съдържа изброимо много нелогически символи. Нека сега $\mathcal{F}$ е формлана система с краен или изброим език. Тогава $\mathcal{F}$ има изброимо много затворени формули от вида $\exists\mathbf{x}\mathbf{A}$ и следователно $\mathcal{F}$ има изброимо много специални константи. Не сега предположим, че $\mathcal{F}$ е непротиворечива. Съгласно доказателството на теоремата за пълнота (първи вариант) $\mathcal{F}$ има модел $\mathfrak{A}$, който е обедняването на стандартната структура $\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''}$, където $\mathcal{F}''$ е пълното разширение на хенкиново разширение $\mathcal{F}'$ на $\mathcal{F}$. Съгласно доказателството на твърдението за хенкиновите разширения $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ се получава от $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, добавяйки специалните константи. Следователно $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ е изброим и съдържа изброимо много константи, и в частност — изброимо много затворени термове. Съгласно доказателството на теоремата на Линденбаум, можем да считаме, че $\mathcal{L}(\mathcal{F}'') \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}')$. Следователно множеството $\mathcal{C}_{\mathcal{F}''}$ (от затворени термове на $\mathcal{F}''$) е изброимо и следователно носителят $|\mathfrak{A}| \equiv |\mathfrak{A}_{\mathcal{F}''}| \equiv \mathcal{C}_{\mathcal{F}''}/\sim$ е най-много изброим (т.е. краен или изброим). Следователно, ако $\mathcal{F}$ е непротиворечива формална система с краен или изброим език, то $\mathcal{F}$ има модел с най-много изброим носител.

Теорема 3.16 (Льовенхайм–Скулем)**.** Нека формалната система $\mathcal{F}$ има краен или изброим език. Тогава, ако $\mathcal{F}$ има безкраен модел, то $\mathcal{F}$ има изброим модел.

Доказателство. Нека $\mathfrak{A}$ е безкраен модел на $\mathcal{F}$. Нека κ_i за $i \geqslant 0$ са нови константи и нека $\mathcal{F}'$ се получава от $\mathcal{F}$, добавяйки тези константи. Нека $\Gamma \equiv \{\kappa_i \neq \kappa_j \mid i < j\}$. Да разгледаме едно крайно $\Gamma' \subseteq \Gamma$. Нека n_0 е такова, че ако $\kappa_i \neq \kappa_j \in \Gamma'$, то $i < j < n_0$. Да фиксираме различни $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n_0} \in |\mathfrak{A}|$. Да разгледаме структурата $\mathfrak{A}'$ за $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$, която има същия носител като $\mathfrak{A}$, интерпретира символите на $\mathcal{F}$ по същия начин като $\mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{A}'(\kappa_i) \equiv \begin{cases} \alpha_i, & i < n_0 \\ \alpha_{n_0}, & i \geqslant n_0. \end{cases}$$

Тогава $\mathfrak{A}$ е обедняването на $\mathfrak{A}'$ до $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ и следователно $\mathfrak{A}' \models \mathcal{F}'$. От друга страна, ако $i < j < n_0$, то

$$\mathfrak{A}'(\kappa_i) \equiv \alpha_i \not\equiv \alpha_j \equiv \mathfrak{A}'(\kappa_j)$$

и значи

$$\mathfrak{A}' \models \kappa_i \neq \kappa_j.$$

Следователно $\mathfrak{A}' \models \mathcal{F}'[\Gamma']$. Оттук и теоремата за компактност следва, че $\mathcal{F}'[\Gamma]$ има модел. Тъй като езикът на $\mathcal{F}'[\Gamma]$ е изброим, то $\mathcal{F}'[\Gamma]$ има най-много изброим модел $\mathfrak{B}'$. Но формулите от Γ не може да са едновременно верни в крайна структура и следователно $\mathfrak{B}'$ е изброим. Нека $\mathfrak{B}$ е обедняването на $\mathfrak{B}'$ до $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Тогава $\mathfrak{B}$ е изброим модел на $\mathcal{F}$.

$\square$