Изпит–задачи по Дискретни структури, СУ, ФМИ, КН2, 09 февруари 2024 г.

Първа част

Име: .... Ф№: .... Група: ....

Зад.	**1**	**2**	**3**	*Общо на част 1*
точки				
от макс.	20	20	20	60

Можете да ползвате наготово изучаваното на лекции, но ***всичко друго*** *трябва да се обоснове добре.*

Задача 1. Нека n и m са цели положителни числа. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^m \right) \binom{n}{k} \right)$$

Задача 2. Нека A е крайно непразно множество. Нека $|A| = n$.

2 т. • Колко релации от вида $R \subseteq A \times A \times A$ има?

8 т. • За всяка релация от вида $R \subseteq A \times A \times A$ казваме, че е *интересна*, ако

$$\forall (a, b, c) \in R : a \neq b \neq c \neq a$$

Какъв е броят на интересните релации?

10 т. • За всяка релация от вида $R \subseteq A \times A \times A$ казваме, че е *забележителна*, ако е интересна и освен това е изпълнено следното

$$\forall a, b, c \in A \; \big((a, b, c) \in R \; \rightarrow (b, a, c) \in R \; \wedge \; (a, c, b) \in R \; \wedge \; (b, c, a) \in R \; \wedge \\ (c, a, b) \in R \; \wedge \; (c, b, a) \in R \, \big)$$

Какъв е броят на забележителните релации?

Задача 3. В някакъв град има три училища. Всяко от тях има точно n ученици. Знае се, че всеки ученик от всяко училище се познава с поне $n + 1$ ученици от другите две училища. Докажете, че съществуват поне трима ученици, нито двама от които не са от едно и също училище, които се познават взаимно.
В тази задача познанството е симетрична релация.