Изпит–задачи по Дискретни структури, КН 2 поток, 09 февруари 2024 г.

Втора част

Име: .... ФN°: .... Група: ....

Зад.	4	5	6	*Общо на част 2*	*Общо на изпита*
точки					
от макс.	20	20	20	60	120

Можете да ползвате наготово изучаваното на лекции, но ***всичко друго*** *трябва да се обоснове добре.*

Задача 4. Нека $G = (V, E)$ е граф с редица от степените $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Припомнете си, че редицата от степените е ненамаляваща, тоест,

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

Докажете, че ако $d_k \geq k$ за всички k, такива че $k \leq n - 1 - d_n$, то G е свързан.

Упътване: Задачата може да се реши с допускане на противното. Разгледайте свързаната компонента, в която се намира връх v_n. Каква е очевидната долна граница за броя на нейните върхове? Какво следва от това за всяка друга свързана компонента?

Задача 5. Даден е неориентиран свързан тегловен граф $G = (V, E)$ с тегловна функция $w : E \to \mathbb{R}$. Професор Дълбоков казва, че ако w е инекция, то G има само едно минимално покриващо дърво. Прав ли е професорът? Обосновете прецизно и формално отговорите си.

Задача 6. Нека A е крайно множество и $|A| = n$. *Инволюция над* A е всяка функця $f : A \to A$, такава че $\forall x \in A : f(f(x)) = x$. Нека T_n е броят на инволюциите над A. Докажете, че следното рекурентно уравнение е в сила за T_n:

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}, & \text{ако } n \geq 2 \end{cases}$$

Упътване: Да кажем, че $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Разгледайте $f(a_n)$. Има точно две възможности: $f(a_n) = a_n$ и $f(a_n) \neq a_n$. Едната от тях съответства на едното събираемо, а другата, на другото събираемо в дясната страна.

Бонус от 20 точки: *Неподвижна точка*, или още се казва *фиксирана точка*, на пермутация f е такъв елемент x от домейна, че $f(x) = x$. Инволюцията е частен случай на пермутация, така че може да говорим за фиксирани точки на инволюции. Намерете формула без рекурсия за броя на инволюциите над A, които нямат фиксирани точки. Какво число трябва да е n, за да има такива инволюции?