МОНОТОННИ ДВОИЧНИ ДЪРВЕТА

Нека M_n е броят на наредените монотонни коренови двоични дървета с n върха, номерирани с целите числа от 1 до n вкл. “Наредени” означава, че различаваме левите и десните наследници. “Номерирани върхове” означава, че изоморфните дървета (различаващи се само по разместването на номерата) се броят за различни. Всеки номер от 1 до n се среща само веднъж в дърво. “Монотонни” означава, че номерата на върховете образуват растяща редица по всеки път от корена към някое листо. Числото n (броят на върховете) е цяло и неотрицателно, тоест може да бъде нула. Щом броим и празното дърво, от рекурсивното определение на наредено монотонно кореново двоично дърво следва, че всеки връх има точно два наследника — поддървета, всяко от които може да е празно. Ако говорим по обичайния начин (т.е. ако не използваме празни поддървета), то всеки връх може да има нула, един или два наследника; ако някой връх има два наследника, важно е кой от тях е ляв и кой е десен; ако някой връх има един наследник, той може да бъде ляв или десен (това са две различни дървета).

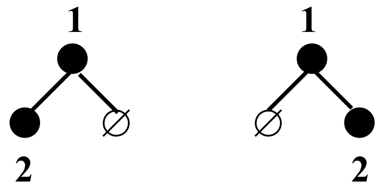
Примери:

— При $n = 0$ има само едно дърво — празното. Тоест $M_0 = 1$.

$$\varnothing$$

— При $n = 1$ има едно дърво, състоящо се само от корен, тоест $M_1 = 1$.

— При $n = 2$ има две дървета, тоест $M_2 = 2$.



Те могат да се изобразят и по следния начин:

— При $n = 3$ има шест дървета, тоест $M_3 = 6$.

Теорема: $M_n = n!$.

Тази формула може да се докаже по различни начини.

Първи начин: с правилото за умножение. Строим дървото връх по връх, от корена към листата.

Връх № 1 може да бъде сложен само на едно място: в корена на дървото.

Връх № 2 може да бъде сложен на две места: като ляв или десен наследник на корена.

Аналогично, за всеки следващ връх има едно място повече: при добавяне на връх се губи едно място, а се създават две нови места (наследниците му). Ето защо броят на възможните места за добавяне на връх нараства с единица, затова връх № k може да се добави на k места. Според правилото за умножение $M_n = 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ n = n!$.

Втори начин: с аналитична комбинаторика. Нека $M(z)$ е експоненциалната пораждаща функция на редицата (M_n), тоест

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} z^n.$$

Рекурсивното определение на наредено монотонно кореново двоично дърво гласи: това е $\varnothing$ или наредена тройка <корен, ляво поддърво, дясно поддърво>, като коренът съдържа елемента с най-малък номер. Символно уравнение:

$$\mathcal{M} = \varepsilon + \mathcal{Z}^{\Box} * \mathcal{M} * \mathcal{M}.$$

То се превръща във функционалното уравнение

$$M(z) = 1 + \int_0^z (t)' . M^2(t)\, dt,$$

тоест

$$M(z) - 1 = \int_0^z M^2(t)\, dt.$$

Диференцираме:

$$M'(z) = M^2(z),$$

тоест

$$\frac{dM}{dz} = M^2.$$

Разделяме променливите:

$$\frac{dM}{M^2} = dz.$$

Интегрираме уравнението:

$$\int \frac{dM}{M^2} = \int dz.$$

Пресмятаме интегралите:

$$\frac{1}{M} = C - z,$$

откъдето намираме

$$M(z) = \frac{1}{C - z} \cdot$$

Интеграционната константа определяме от началното условие $M(0) = M_0 = 1$. Като заместим в последната формула, получаваме $C = 1$, тоест

$$M(z) = \frac{1}{1 - z} \cdot$$

Развиваме получената функция в степенен ред:

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Съпоставяме това развитие с определението на функцията $M(z)$:

$$M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{n!} z^n.$$

Коефициентите пред z^n трябва да бъдат съответно равни, тоест

$$\frac{M_n}{n!} = 1,$$

откъдето намираме $M_n = n!$.