Задача 1: Разглеждаме азбуката $\Sigma = \{0, 1\}$. Със Σ^* означаваме множеството от всички стрингове над Σ, включително и празния стринг. Докажете **по индукция**, че не съществува $x \in \Sigma^*$, такъв че $0x = x1$.

Решение: Задачата има следното елементарно решение. Да допуснем, че има такъв стринг x. Нека $x = x_1 x_2 \cdots x_k$, където $x_1, \ldots, x_k \in \Sigma$. По допускане,

$$0x_1x_2 \cdots x_{k-1}x_k = x_1x_2 \cdots x_{k-1}x_k1$$

откъдето заключаваме, че

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \\ x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 \\ &\cdots \\ x_{k-1} &= x_k \\ x_k &= 1 \end{aligned}$$

което е очевидно невъзможно.

Иска се обаче доказателство по индукция. Нека $P(n)$ е следният предикат с домейн $\mathbb{N}$: за всяко $y \in \Sigma^*$, ако $|y| = n$, то $0y \neq y1$. Ще докажем, че $\forall n : P(n)$ със силна индукция по n.

Базата е $n = 0$ и $n = 1$.

- Нека $n = 0$. Единственият стринг в Σ^* с дължина нула е празният стринг ϵ. Наистина, $0\epsilon \neq 1\epsilon$, защото $0\epsilon = 0$, а $1\epsilon = 1$.
- Нека $n = 1$. Има два стринга в Σ^* с дължина едно, а именно 0 и 1.
  - Ако $x = 0$, наистина $00 \neq 01$.
  - Ако $x = 1$, наистина $01 \neq 11$.

В индуктивното предположение допускаме $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$ за някакво естествено k.

В индуктивната стъпка доказваме $P(k+1)$, използвайки индуктивните предположения. Допускаме $\neg P(k+1)$. А именно, допускаме, че съществува $x \in \Sigma^*$, такъв че $|x| = k+1$ и $0x = x1$. Но тогава 0 е първата буква на x, а 1 е последната буква на x. Тогава $x = 0u1$, за някакъв $u \in \Sigma^*$, такъв че $|u| = k-1$. Тъй като $k+1 \geq 2$, вярно е, че $k-1 \geq 0$, така че такъв u съществува.

По допускане, $0x = x1$, откъдето имаме $00u1 = 0u11$. Оттук заключаваме, че $0u = u1$. Но индуктивното допускане $P(k-1)$ казва, че за всеки $y \in \Sigma^*$, такъв че $|y| = k-1$ е вярно, че $0y \neq y1$. В частност, $0u \neq u1$.

Полученото противоречие опровергава последното направено допускане, а именно, $\neg P(k+1)$. Заключаваме, че $P(k+1)$ е истина.

Задача 2: Нека G е следното множество:

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \big\{ g \mid g : \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 1\} \to \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 1\} \big\}$$

Нека $\preceq \subseteq G \times G$ е следната релация

$$\preceq \stackrel{\text{def}}{=} \big\{ (a,b) \in G \times G \mid \forall t \in \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 1\} : a(t) \le b(t) \big\}$$

12 т. • Докажете или опровергайте, че $\preceq$ е частична наредба.

13 т. • Докажете или опровергайте, че $\preceq$ е линейна наредба.

Решение: Множеството $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 1\}$ е затвореният интервал от нула до едно, който обикновено се записва с "$[0,1]$". Множеството G е от всички функции, изобразяващи $[0,1]$ в $[0,1]$. За всеки две от тези функции, наречени във втората дефиниция a и b, $a \preceq b$ тстк стойността на a не надхвърля стойността на b за всеки елемент на $[0,1]$.

Първо ще покажем, че $\preceq$ е частична наредба.

- $\preceq$ е рефлексивна, понеже за всяка функция $f \in G$ е вярно, че $f \preceq f$. А това е вярно, понеже за всяко $x \in [0,1]$ е вярно, че $f(x) \le f(x)$, тъй като $\le$ върху реалните числа е рефлексивна.

- Ще докажем, че $\preceq$ е антисиметрична. За целта е достатъчно да покажем, че за всеки $f, g \in G$ е вярно, че

  $$(f \preceq g) \wedge (g \preceq f) \to f = g$$

  Нека f и g са произволни функции от G. Да допуснем, че $(f \preceq g) \wedge (g \preceq f)$. Но това е същото като

  $$\forall x \in [0,1] \, \big(f(x) \le g(x)\big) \;\wedge\; \forall x \in [0,1] \big(g(x) \le f(x)\big)$$

  Съгласно свойствата на универсалния квантор, изучавани на лекции, това е същото като

  $$\forall x \in [0,1] \, \big(f(x) \le g(x) \;\wedge\; g(x) \le f(x)\big)$$

  На свой ред, това е същото като

  $$\forall x \in [0,1] \, \big(f(x) = g(x)\big)$$

  заради антисиметричността на $\le$. Показахме, че f и g са една и съща функция.

- Ще докажем, че $\preceq$ е транзитивна. Нека f, g и h са прозволни функции от G. Нека

  $$f \preceq g \;\wedge\; g \preceq h$$

Но това е същото като

$$\forall x \in [0,1]\ \big(f(x) \leq g(x)\big)\ \wedge\ \forall x \in [0,1]\big(g(x) \leq h(x)\big)$$

Съгласно свойствата на универсалния квантор, изучавани на лекции, това е същото като

$$\forall x \in [0,1]\ \big(f(x) \leq g(x)\ \wedge\ g(x) \leq h(x)\big)$$

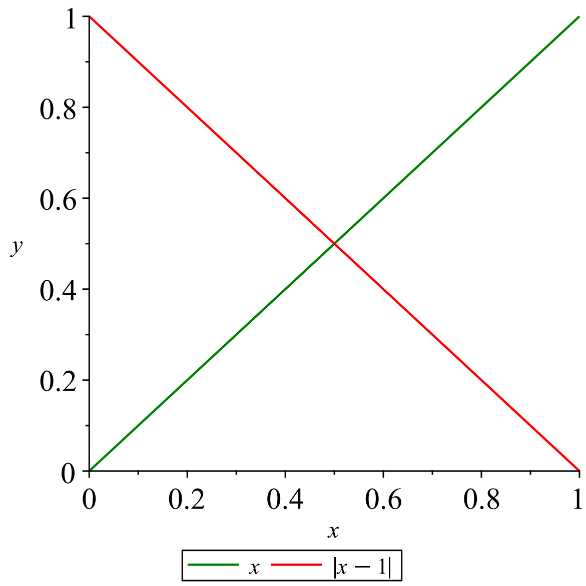
Но релацията $\leq$ над реалните числа е транзитивна, така че последното влече

$$\forall x \in [0,1]\ \big(f(x) \leq h(x)\big)$$

Това е същото като $f \preceq h$.

И така, $f \preceq g\ \wedge\ g \preceq h \rightarrow f \preceq h$. Тогава $\preceq$ е тразитивна.

Сега ще покажем, че $\preceq$ не е линейна наредба. За целта е достатъчно да покажем две функции $f, g \in G$, такива че $f \npreceq g$ и $g \npreceq f$. С други думи, две функции, които са несравними по отношение на тази релация.
Такава двойка-контрапример е $f(x) = x$ и $g(x) = |x-1|$:



Графиката е генерирана с Maple(tm).

Задача 3: Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Избираме $n+1$ числа, две по две различни, всяко от които не надхвърля $2n$. Докажете, че измежду избраните числа има поне две, които са взаимно прости.

Решение: Конструираме следните множества:

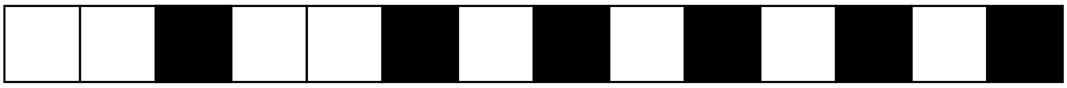
$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 2\} \\
A_2 &= \{3, 4\} \\
A_3 &= \{5, 6\} \\
&\cdots \\
A_{n-1} &= \{2n-3, 2n-2\} \\
A_n &= \{2n-1, 2n\}
\end{aligned}$$

Очевидно е, че за всяко от тези множества, двата елемента са взаимно прости.

Нека множествата $A_1, \ldots, A_n$ са чекмеджетата, а избраните $n+1$ на брой числа са ябълките. Съгласно принципа на Дирихле, съществува чекмедже, в което има повече от една ябълка. С други думи, съществува $i \in \{1, \ldots, n\}$, такова че и двата елемента на A_i са измежду избраните числа. Но, както вече забелязахме, елементите на A_i са взаимно прости.

Задача 4: Нека $n \in \mathbb{N}^{+}$. Представете си редица от $2n$ квадратчета с редуващи се цветове бял-черен-бял-черен- и така до края. Примерно, за $n = 7$:

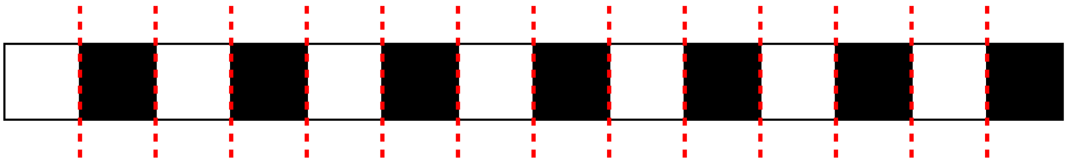
Разрешено е да прилагаме следната трансформация върху редицата. Избираме *непрекъсната подредица* от квадратчета и обръщаме цветовете им, което означава, че белите стават черни, а черните стават бели. В горния пример, ако изберем подредицата от второто, третото и четвъртото квадратче, получаваме тази редица.



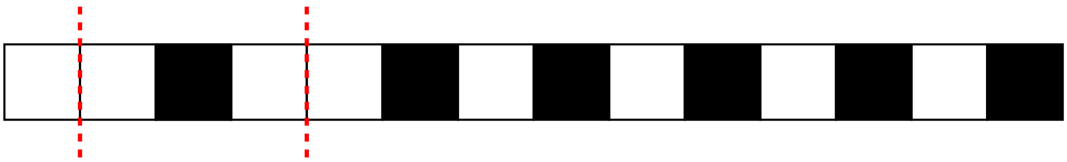
Очевидно е, че с n трансформации може да направим началната редица едноцветна – примерно, обръщаме всички черни квадратчена в бели. Докажете, че редицата не може да стане едноцветна с по-малко от n трансформации.

Решение: Ключовото наблюдение е, че ако трансформация включва съседни квадратчета, да кажем k и $k+1$, и те са оцветени в различни цветове, то тя обръща цветовете и на двете и те продължават да са оцветени в различни цветове. За да станат квадратчета k и $k+1$ в един и същи цвят, трябва да има трасформация, която включва само едното от тях. С други думи, трябва да има трансформация, която или завършва с квадратче k, или започва с квадратче $k+1$.

Квадратчетата са общо $2n$, така че има $2n-1$ разделители между тях. Разделителите може да си представяме като вертикални червени черти (ползваме примера от условието).



Всяка трансформация се простира или от един разделител до друг, или от левия край до разделител, или от разделител до десния край, или от левия край до десния край. Примерно, трансформацията от условието се простира между тези два разделителя.



Следователно, всяка трансформация ползва най-много два разделителя. Следователно, трябва да направим поне n трансформации, за да използваме всички $2n-1$ разделители; ако направим $n-1$ трансформации, поне един разделител няма да бъде ползван и квадратчетата от двете му страни ще се окажат в различни цветове.