Примерни решения на задачите от семестриалното контролно по ДС на 21 април 2024 г.

Зад. 1 Нека $a_1, \ldots, a_n$ са произволни реални числа, такива че $0 \le a_i \le 1$ за $1 \le i \le n$. За всяко непразно множество $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, нека S_X означава сумата $\sum_{i \in X} a_i$. Докажете, че съществуват различни непразни множества $X, Y \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, такива че $|S_x - S_Y| \le \dfrac{n}{2^n - 2}$.

Решение: Един помощен факт. Разглеждаме произволен интервал с дължина ℓ и избираме произволни $m \ge 2$ точки от него. Твърдим, че поне две от тях са на разстояние $\le \dfrac{\ell}{m-1}$ помежду си. Наистина, да си представим интервала "нарязан" на $m - 1$ подинтервали, всеки с дължина $\dfrac{\ell}{m-1}$. Прилагаме принципа на Дирихле, като точките са ябълките, а подинтервалите са чекмеджетата и заключаваме, че поне две точки попадат в един подинтервал. Това влече, че както и да изберем точките, винаги има две на разстояние $\le \dfrac{\ell}{m-1}$ помежду си.

Връщаме се на задачата. Първо съобразяваме, че за произволно $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $0 \le S_x \le n$ и тези граници са точни. После съобразяваме, че $|S_x - S_Y|$ е разстоянието между S_X и S_Y, понеже S_X и S_Y са числа. Нещо повече, както вече забелязахме, и S_x, и S_y са от интервала $[0, n]$, който е с дължина n.

Знаем, че подмножествата на $\{1, 2, \ldots, n\}$ са 2^n на брой, така че непразните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$ са $2^n - 1$ на брой.

Накрая прилагаме помощния факт с $\ell = n$ и $m = 2^n - 1$. Точките са $2^n - 1$ на брой, защото отговарят на непразните подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$ Желаният резултат следва веднага.

Зад. 2 Числата на Фибоначи F_0, F_1, ..., се дефинират чрез следното рекурентно уравнение:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Докажете, че за всяко $n \geq 1$ е в сила

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n \tag{1}$$

Решение: Ще докажем твърдението по индукция по n. Базовият случай е $n = 1$. Наистина, ако $n = 1$, изразът (1) става

$$F_{1+1}F_{1-1} = F_1^2 + (-1)^1$$

което е

$$F_2F_0 = F_1^2 + (-1)^1$$

което е

$$1 \cdot 0 = 1 + (-1)$$

което е вярно. Доказахме базовия случай.

Допускаме, че

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n$$

за някое $n \geq 1$. Но това е еквивалентно на

$$F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1} = F_n^2 \tag{2}$$

Ще докажем, че

$$F_{n+2}F_n = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \tag{3}$$

използвайки индуктивното предположение във вида (2).

По дефиниция е вярно, че

$$F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$$

Умножаваме двете страни по F_{n+1} и получаваме

$$F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} = F_{n+1}^2$$

Добавяме $(-1)^{n+1}$ към двете страни и получаваме

$$F_{n+1}F_n + \underbrace{F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1}}_{F_n^2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

Съгласно (2), заместваме $F_{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+1}$ с F_n^2 и получаваме

$$F_{n+1}F_n + F_n^2 = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

Това е същото като

$$(\underbrace{F_{n+1} + F_n}_{F_{n+2}})F_n = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

Тъй като $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ по дефиниция, този израз става

$$F_{n+2}F_n = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$$

Но това е точно (3).

Зад. 3 По колко начина може да раздадем 16 еднакви билети на 5 човека, така че всеки да получи поне един билет, но никой да не получи повече от 7 билети? Дайте отговор-число.

Решение: Тъй като всеки трябва да получи поне един билет, но билетите са неразличими, първо раздаваме по един билет на всеки човек и вече задачата е тази: по колко начина може да раздадем 11 еднакви билети на 5 човека, така че никой да не получи повече от 6 билети?

Нека U е множеството от раздаванията на 11 билета на 5 човека без ограничения. Както знаем от лекции, броят на начините да раздаде m неразличими билети на n човека е

$$\binom{m+n-1}{n-1},$$

така че

$$|U| = \binom{11+4}{4} = \binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1\,365$$

Но имаме ограничението никой да не получи повече от 6 билета. Нека X_i е подмножеството на U от тези раздавания, в които човек i получава поне 7 билета. Лесно се вижда, че

- $|X_i| = |X_j|$ за $1 \le i < j \le 5$ и
- $X_i \cap X_j = \varnothing$ за $1 \le i < j \le 5$, защото билетите са само 11.

Прилагаме принципа на включването и изключването, имайки предвид предното изречение, и заключаваме, че търсеният отговор е

$$|U| - 5 \cdot |X_1|$$

А колко е $|X_1|$? Представяме си, че първият човек получава 7 билета (което го прави "нарушител") и остават 4 билета, които може да се раздадат на петте човека по

$$\binom{4+4}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$$

начина. Тогава търсеният отговор е

$$1\,365 - 350 = 1\,015$$

Зад. 4 На лекции сме споменавали битове и битови регистри. "Бит" означава двоична цифра, като нейната стойност е или 0, или 1. "Битов регистър" е редица от битове.

За целите на тази задача дефинираме *тритове* и *тритови регистри*. "Трит" означава троична цифра, като нейната стойност е или 0, или 1, или 2. "Тритов регистър" е редица от тритове. Ще разглеждаме добавяне на единица към трит. Правилата са очевидните: $0+1=1$, $1+1=2$, а $2+1=0$ и има пренос 1. Добавяне на единица към тритов регистър е добавяне на единица към последния трит; ако при това се получи пренос, той се добавя към предпоследния трит, и така нататък. Примерно, добавяне на единица към $0\,0\,0$ дава $0\,0\,1$, добавяне на единица към $0\,1\,2$ дава $0\,2\,0$, а добавяне на единица към $1\,2\,2$ дава $2\,0\,0$.

Разгледайте тритов регистър X с n трита. Колко различни състояния има X? "Състояние на регистър" е наредената n-орка от стойностите на неговите тритове.

Нека началното състояние на X е само от нули:

$$X^{\text{начално}} = 0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0$$

Чрез последователни добавяния на единици достигаме крайно състояние на X само от двойки:

$$X^{\text{крайно}} = 2\,2\,2 \cdots 2\,2\,2$$

Колко промени на тритове са се случили при всички преходи от началното до крайното състояние?

Решение: Различните състояния са точно 3^n. Можем да изведем това, съобразявайки, че състоянията на регистъра са точно комбинаторните конфигурации с повторения и наредба с големина n над опорно множество с мощност 3.

Нека T_n е броят на промените на тритове при преминаването от $X^{\text{начално}}$ до $X^{\text{крайно}}$ чрез серия от добавяния на единица. Ще съставим рекурентно уравнение за T_n и ще го решим.

Празен регистър няма да разглеждаме, така че минималната стойност на n е $n = 1$. При преминаването от 0 през 1 до 2 се случват точно две промени на тритове. Следователно, $T_1 = 2$.

Да си представим тритов регистър с повече от една позиции. Ако си представим всички състояния от $X^{\text{начално}}$ до $X^{\text{крайно}}$, написани едно под друго в реда на появяването им, виждаме таблица с 3^n реда и n колони. Тя може да се разбие на три подтаблици, всяка с по 3^{n-1} реда, една над друга, като най-горната има само 0 в най-лявата позиция, средната има само 1 в най-лявата позиция, а най-долната има само 2 в най-лявата позиция. Тези подтаблици са напълно еднакви, ако не гледаме най-левите им позиции. Ерго, в рамките на всяка от тях се случват точно T_{n-1} промени на тритове. Дотук имаме $3T_{n-1}$ промени на тритове. При преминаването от най-горната към средната таблица се случват n тритови промени, също така и при преминаването от средната към най-долната таблица се случват n тритови промени. Общо, броят на тритовите промени е $3T_{n-1} + 2n$. Рекурентното уравнение е

$$T_n = \begin{cases} 2, & \text{ако } n = 1 \\ 3T_{n-1} + 2n, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Характеристичното уравнение е

$$x - 3 = 0$$

с мултимножество от корените $\{3\}_M$. Заради нехомогенната част добавяме $\{1, 1\}_M$ и получаваме мултимножеството $\{1, 1, 3\}_M$. Общото решение е

$$T_n = A1^n + Bn1^n + C3^n$$

Неизвестните константи A, B и C намираме от началните условия. Разполагаме само с едно начално условие $T_1 = 2$. Нужни са ни още две. Тях ги пресмятаме от даденото начално условие и рекурсията: $T_2 = 10$ и $T_3 = 36$. Тогава

$$\begin{aligned} 2 &= A + B + 3C \\ 10 &= A + 2B + 9C \\ 36 &= A + 3B + 27C \end{aligned}$$

Решението на системата е $A = -\frac{3}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{3}{2}$. Решението на рекурентното уравнение е

$$T_n = -\frac{3}{2} - n + \frac{3^{n+1}}{2}$$

Зад. 5 Докажете тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

чрез комбинаторни разсъждения.

Решение: *Тернарните стрингове* са тези над азбуката $\{0, 1, 2\}$. Нека S е множеството от тернарните стрингове с дължина n. Дясната страна на тъждеството е очевидно $|S|$.

Лявата страна също е мощността на S, но там се брои по-подробно. Разбиваме S на $n + 1$ подмножества X_0, X_1, $\ldots$, X_n, където X_k са тернарните стрингове с дължина n, имащи точно $n - k$ двойки. Очевидно има $\binom{n}{n-k}$ начина да изберем $n - k$ позиции за двойките от общо n позиции, при което остават $n - (n - k) = k$ позиции за нули и единици, които k позиции може да запълним по 2^k различни начина (с нули и единици). Тогава $|X_k| = 2^k \binom{n}{n-k}$. Предвид факта, че $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, заключаваме, че $|X_k| = 2^k \binom{n}{k}$. Съгласно комбинаторния принцип на разбиването,

$$|S| = \sum_{k=0} |X_k| = \sum_{k=0} 2^k \binom{n}{k}$$

Заключаваме, че

$$3^n = \sum_{k=0} 2^k \binom{n}{k}$$

Зад. 6 Нека p, q, r, s, t, x, y и z са съждения.

Обяснете какво е тавтология.

Докажете, че следното съждение е тавтология.

$$(p \to q) \vee (((p \wedge t) \vee (q \wedge x) \vee (r \wedge y)) \to ((t \to y) \to z) \to p) \vee (q \to r)$$

Решение: Даденото съждение е еквивалентно на

$$(p \to q) \vee (q \to r) \vee \underbrace{(((p \wedge t) \vee (q \wedge x) \vee (r \wedge y)) \to ((t \to y) \to z) \to p)}_{A}$$

заради комутативността на дизюнкцията. Означаваме с "A" съставното съждение $(((p \wedge t) \vee (q \wedge x) \vee (r \wedge y)) \to ((t \to y) \to z) \to p)$. Тогава даденото съждение е еквивалентно на $(p \to q) \vee (q \to r) \vee A$.

Ще докажем, че $(p \to q) \vee (q \to r)$ е тавтология. Наистина,

$(p \to q) \vee (q \to r) \equiv$ свойство на импликацията

$\neg p \vee q \vee \neg q \vee r \equiv$ асоциативност на дизюнкцията

$\neg p \vee (q \vee \neg q) \vee r \equiv$ свойства на отрицанието

$\neg p \vee \top \vee r \equiv$ свойства на константите

$\top$

Щом $(p \to q) \vee (q \to r)$ е тавтология, то цялото дадено съждение $(p \to q) \vee (q \to r) \vee A$ е тавтология, независимо от това, какво точно е A.