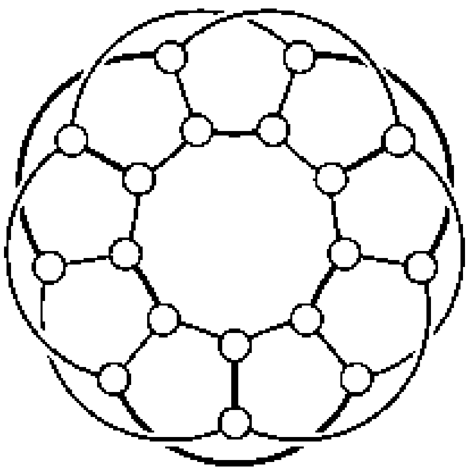
Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите
(СУ, ФМИ, летен семестър на 2023 / 2024 уч.г.)

Задача 1. Пресметнете остатъка, който биномният коефициент $\binom{312}{107}$ дава при деление на 7.

Задача 2. Пресметнете най-високата степен на 5, която дели биномния коефициент $\binom{391}{278}$.

Задача 3. Постройте всички дървета с шест върха (без корен) и посочете центровете им.

Задача 4. Осемнайсет държавни представители провеждат международна среща, на която всеки представител преговаря с трима други представители, както е показано на схемата.



Преговорите между кои да е двама представители продължават точно един ден и на тях не може да присъстват други хора. Колко дена най-малко са нужни за провеждане на всички преговори?

Задача 5. Два отбора играят футболен мач, докато някой вкара пет гола. Води се протокол на срещата, например 0:0, 1:0, 1:1, 2:1, 3:1, 4:1, 4:2, 5:2. Колко са възможните протоколи?

Задача 6. Девет футболни отбора изиграли няколко мача. Нямало време и не всички отбори играли помежду си. Всеки два отбора, които играли един срещу друг, играли един срещу друг точно по два мача: в единия мач домакин бил единият отбор, в другия мач — другият отбор. Всички отбори изиграли един и същи брой мачове, а общият брой мачове се оказал точен квадрат.

а) Колко мача са били изиграни общо?

б) По колко мача е изиграл всеки отбор?

в) Предложете едно разписание на мачовете във вид на неориентиран граф (без кратни ребра) с девет върха — отборите; с ребра между върховете, чиито отбори са играли един срещу друг.

Оценката = броя на решените задачи. Признават се само пълни решения!
За положителна оценка е нужно да бъде решена поне една задача от всеки дял, тоест поне една от задачите 1, 2 и 5 и поне една от задачите 3, 4 и 6.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 се решава с теоремата на Люка, приложена в бройната система с основа 7:

$$\binom{312_{(10)}}{107_{(10)}} = \binom{624_{(7)}}{212_{(7)}} \equiv \binom{6}{2}\binom{2}{1}\binom{4}{2} = 15\ .\ 2\ .\ 6 \equiv 1\ .\ 2\ .\ 6 = 12 \equiv 5 \pmod 7.$$

Отговор: Биномният коефициент дава остатък 5 при деление на 7.

Задача 2 се решава с теоремата на Кумер, приложена в бройната система с основа 5:

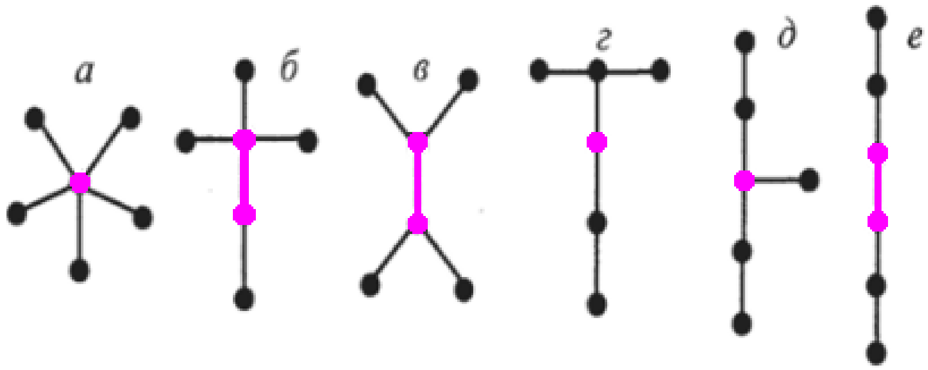
$$391_{(10)} = 3031_{(5)};$$
$$278_{(10)} = 2103_{(5)}.$$

Изваждаме $2103_{(5)}$ от $3031_{(5)}$:

$$\begin{array}{r} \bullet\ \bullet\ \ \ \ \ \ \\ 3031_{(5)} \\ -2103_{(5)} \\ \hline 423_{(5)}. \end{array}$$

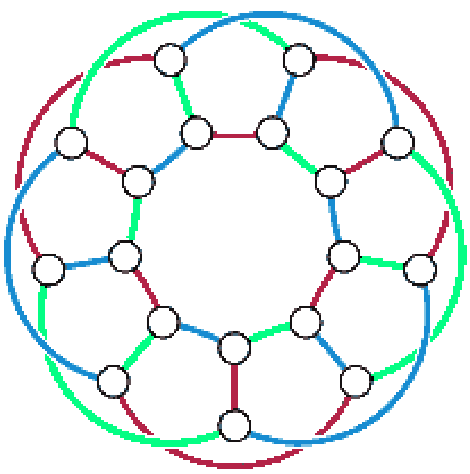
При изваждането се взима едно назаем точно два пъти; разредите са отбелязани с големи точки. Следователно най-високата степен на 5, която дели биномния коефициент $\binom{391}{278}$, е $5^2 = 25$.

Задача 3. Има общо шест дървета с шест върха (без корен). Показани са на чертежа.

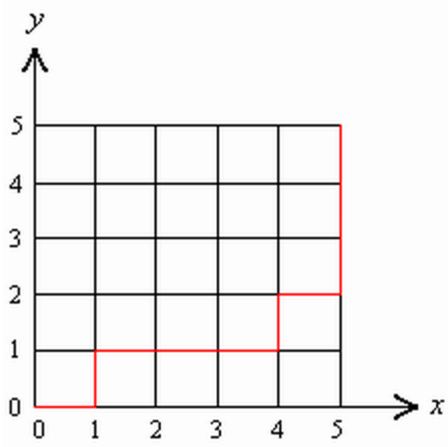


Центровете на дърветата са оцветени в розово. Три дървета (*а*, *г*, *д*) имат един централен връх. Другите три (*б*, *в*, *е*) имат централно ребро и два централни върха — краищата на това ребро.

Задача 4. Три дена са достатъчни за провеждане на преговорите, както личи от оцветяването (всеки цвят съответства на един ден). По-малко дни не стигат, защото всеки представител преговаря с трима други.



Задача 5. Допълваме протокола от мача до резултат 5:5 с фиктивни голове, вкарани от победения отбор след края на срещата. Например протоколът от условието на задачата "0:0, 1:0, 1:1, 2:1, 3:1, 4:1, 4:2, 5:2" се допълва с "5:3, 5:4, 5:5". Съответствието между оригинален и допълнен протокол е биекция, защото фиктивните резултати лесно се познават и премахват: това са резултатите след първия с петица. Фиктивните резултати служат за улесняване на броенето: след добавянето им протоколите завършват с резултат 5:5. Промяна на резултата настъпва само след вкаран гол, тоест допълнен протокол съответства взаимно еднозначно на разходка в целочислена решетка: резултатът $x:y$ се изобразява чрез точката $(x\,;\,y)$, като при всеки вкаран гол се увеличава с единица или x, или y (според това кой отбор е вкарал гола). Например на протокола от условието на задачата, допълнен по-горе, съответства разходката, изобразена на чертежа. Затова е достатъчно да преброим разходките от т. $(0\,;0)$ до т. $(5\,;5)$. Всяка разходка се състои от общо десет единични отсечки — пет водоравни и пет отвесни. Следователно всяка разходка се определя от поредните номера на петте водоравни отсечки. Например за разходката от чертежа водоравни са първата, третата, четвъртата, петата и седмата единична отсечка. Редът на изброяване на номерата на водоравните отсечки няма значение: ако ги изброим в друг ред, ще се получи същата разходка. Един пореден номер не може да бъде използван два пъти в една разходка. Следователно имаме *комбинации без повторение* на десет елемента, от пети клас. Броят на тези комбинации е $C_{10}^{5} = 252$. Толкова са разходките от разглеждания вид. Толкова са и протоколите на футболните срещи, играни до вкарването на пети гол от някой отбор.



Отговор: Има 252 възможни протокола.

Задача 6. Представяме дадените сведения чрез неориентиран граф с девет върха — отборите. Между два върха има ребро точно когато съответните два отбора са играли един срещу друг, като на двата мача съответства единствено ребро (тоест графът не съдържа кратни ребра). По условие всеки отбор е изиграл един и същи брой мачове — четно число $2r$. Графът е регулярен: всичките му върхове имат еднаква степен r. Понеже са били изиграни някакви мачове, то $r \geq 1$. Тъй като r е броят на отборите, срещу които е играл произволен отбор, то $r \leq 8$.

Всеки връх е от степен r, а броят на ребрата е половината от сбора на степените, тоест $\dfrac{9r}{2}$. Това число е цяло, следователно r е четно.

Дотук знаем, че r е четно число от 1 до 8 включително, тоест r има стойност 2, 4, 6 или 8. Всяко ребро представя два мача (между едни и същи отбори), затова броят на всички мачове е два пъти по-голям от броя на ребрата, тоест $9r$. По условие това число е точен квадрат, следователно r е точен квадрат. От възможните стойности на r (2, 4, 6 и 8) само числото 4 е точен квадрат.

И така, $r = 4$. Били са изиграни $9r = 36$ мача, като това число е точен квадрат $(36 = 6 \times 6)$, а половината от него (18) е броят на ребрата на графа. От всеки връх излизат $r = 4$ ребра. Всяко ребро представя два мача, значи всеки отбор е изиграл $2r = 8$ мача (срещу четири отбора).

На всяко разписание на мачовете съответства регулярен граф с девет върха от степен 4. Един такъв граф е показан на чертежа.