Задача 1: Нека $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ е свързан граф. Докажете, че съществува пермутация $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, такава че $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, подграфът на G, индуциран от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, е свързан.

Решение: Неформално казано, твърди се, че има начин да бъдат наредени линейно върховете на всеки свързан граф по такъв начин, че първите i върха в наредбата да индуцират свързан граф, за $1 \leq i \leq n$. Забележете, че $(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(n)})$ е една линейна наредба на върховете. Примерно, ако $n = 6$ и $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 1$, $\pi(4) = 6$, $\pi(5) = 5$ и $\pi(6) = 3$, линейната наредба $(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(6)})$ е $(v_4, v_2, v_1, v_6, v_5, v_3)$.

Ще конструираме пермутацията π със следния алгоритъм.

- В началото, $i \leftarrow 1$ и $\pi(i) \leftarrow 1$.
- (*) За i от 2 до $n - 1$ правим следното.
  - Нека G^i е графът $G - \{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$.
  - (**) Нека v_j е прозволен връх от G^i, който в G е съсед на поне един връх от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$.
  - Правим $\pi(i + 1) \leftarrow j$ и $i \leftarrow i + 1$.

Твърдим, че всеки път, когато изпълнението е на ред (*), е вярно, че подграфът на G, индуциран от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, е свързан. Това ще докажем по индукция по броя на достиганията на ред (*).

Базата е първото достигане на ред (*). При първото достигане на ред (*), i е 1, $\pi(i)$ е също 1, така че $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$ всъщност е $\{v_1\}$. Подграфът на G, индуциран от множеството от върхове $\{v_1\}$, е $(\{v_1\}, \emptyset)$ и той наистина е свързан.

Допускаме, че твърдението е вярно за някое достигане на (*), което не е последното. Щом не е последното, $i \leq n - 1$. Тогава съществува връх на G, който не е в $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, защото всички върхове на G са n на брой. Щом съществува връх на G, който не е в $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, задължително съществува връх v_j, такъв че $v_j \notin \{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$ и освен това v_j е съсед на поне един връх от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$; ако нямаше връх извън $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, който да е съсед на връх от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, графът G нямеше да е свързан. И така, връх v_j, за какъвто се говори на ред (**), съществува. Ние вече допуснахме, че подграфът на G, индуциран от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, е свързан. Но тогава подграфът на G, индуциран от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}, v_j\}$, също е свързан, защото v_j е съсед на поне един от $v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}$. След като присвоим $\pi(i+1) \leftarrow j$ и $i \leftarrow i + 1$, спрямо новата стойност на i отново е вярно, че подграфът на G, индуциран от $\{v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(i)}\}$, е свързан.

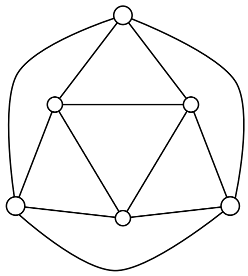
С което доказахме съществуването на търсената пермутация π.

Задача 2: Нека $G = (V, E)$ е свързан нетривиален граф.

Нека $k < |V|$. Казваме, че G *е k-върхово-свързан*, ако $G - S$ е свързан за всяко $S \subset V$, такова че $|S| < k$. Максималното число k, такова че G е k-върхово-свързан, се нарича *върховата свързаност на G*, която тук ще бележим със "$cv(G)$".

Казваме, че G *е ℓ-реброво-свързан*, ако $G - F$ е свързан за всяко $F \subset E$, такова че $|F| < \ell$. Максималното число ℓ, такова че G е ℓ-реброво-свързан, се нарича *ребровата свързаност на G*, която тук ще бележим със "$ce(G)$".

2 т. Намерете върховата и ребровата свързаност на следния граф.



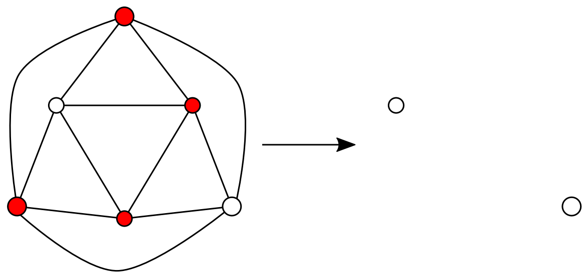
Дайте съвсем кратка обосновка.

23 т. Докажете, че за произволен нетривиален свързан граф G е в сила

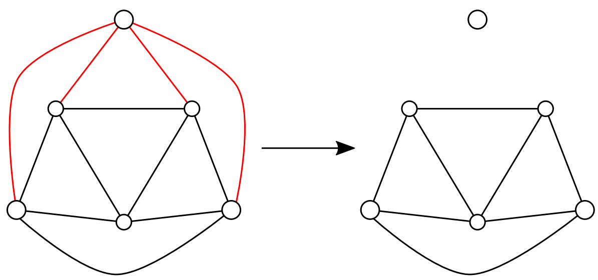
$$cv(G) \leq ce(G) \leq \delta(G)$$

Решение: Графът от илюстрацията се нарича *осмостен* (*octahedron* на английски). Нека го бележим с $\mathcal{O}$.

Ще покажем, че $cv(\mathcal{O}) = 4$. Приемаме за очевидно, че след изтриването на кои да е три върха, графът остава свързан. Изтриването на тези четири върха (в червено) обаче води до несвързан граф.



Ще покажем, че $ce(\mathcal{O}) = 4$. Приемаме за очевидно, че след изтриването на кои да е три ребра, графът остава свързан. Изтриването на тези четири ребра (в червено) обаче води до несвързан граф.



Сега ще докажем, че

$$cv(G) \leq ce(G) \leq \delta(G)$$

Ако G е пълен граф, очевидно $cv(G) = ce(G) = \delta(G) = |V| - 1$. БОО, нека G не е пълен граф.

Първо ще докажем $ce(G) \leq \delta(G)$. Наистина, за кой да е връх $v \in V$ е вярно, че изтриването на ребрата, инцидентни с v, води до това, че v става изолиран връх. И тъй като останалите върхове остават след изтриването на тези ребра, ясно е, че изолираният връх v е една свързана компонента след изтриването. Тогава графът след изтриването не е свързан. Но броят на ребрата, инцидентни с v, е степента на v. Тогава минималната степен на връх в графа е горна граница за ребровата свързаност на графа. Накратко, $ce(G) \leq \delta(G)$.

Сега ще докажем $cv(G) \leq ce(G)$. Нека F е множество от ребра с минимална мощност, чието изтриване води до несвързан граф. Такова множество очевидно съществува, понеже върховете са поне два, така че изтриването на всички ребра би довело до несвързан граф. Тъй като F е с минимална мощност, $|F| = ce(G)$. Ще докажем, че $cv(G) \leq |F|$.

- Първо допускаме, че съществува връх $v \in V$, който не е инцидентен с никое ребро от F. По конструкция, $G - F$ е несвързан. Нека G' е тази свързана компонента на $G - F$, която съдържа връх v. Нека U е множеството от тези върхове на G', които са инцидентни с поне едно ребро от F.

  Забележете, че няма ребро в F, чиито два края са върхове от G'. Това следва от минималността на F – ако имаше такова ребро e в F, то $F \setminus \{e\}$ би било такова, че изтриването му води до несвързан граф. От това, че няма ребро от F, чиито два края са върхове от G', следва, че $|U| \leq |F|$.

  Очевидно е, че $G - U$ е несвързан граф. Тогава $cv(G) \leq |U|$. Заключаваме, че $cv(G) \leq |F|$.

- Сега допускаме, че всеки връх от V е инцидентен с поне едно ребро от F. Нека v е произволен връх от графа. Нека G' е тази свързана компонента на $G - F$, която съдържа връх v. Ще докажем, че $d_G(v) \leq |F|$.

  Нека N е множеството от съседите на u в G. Ясно е, че всеки връх $w \in N$, такъв че реброто (v, w) не е в F, е връх на G'. Нека

  $$U = \{w \in N \mid (v, w) \notin F\}$$

  Както вече отбелязахме, $U \subset V(G')$.

  Но всеки връх на G е инцидентен с ребро от F при текущите допускания, така че всеки връх от U е инцидентен с ребро от F. Нека

  $$F_U = \{e \in F \mid \text{ единият край на } e \text{ е връх от } U\}$$

  Също както в предния подслучай, няма ребро в F, чиито два края са върхове от G'; в частност, няма ребро в F, чиито два края са върхове от U. Тогава $|U| \leq |F_U|$.

Върховете $w \in N$, такива че $(v, w) \in F$, не са върхове на G', понеже няма ребро в F, чиито два края са върхове от G'. Нека

$$W = \{w \in N \mid (v, w) \in F\}$$

Нека

$$F_W = \{(v, w) \in F \mid w \in W\}$$

Ясно е, че $|W| = |F_W|$.

Забелязваме, че N се разбива на U и W, така че $|N| = |U| + |W|$. Но вече знаем, че

$$\begin{aligned} |U| &\leq |F_U| \\ |W| &= |F_W| \end{aligned}$$

Очевидно е, че $F_U \cap F_W = \emptyset$, така че $|F_U| + |F_W| \leq |F|$. Тогава $|N| \leq |F|$. Но $|N| = d_G(v)$. Доказахме, че $d_G(v) \leq |F|$.

И така, $d_G(v) \leq ce(G)$. Сега забелязваме, че $d_G(v)$ е горна граница за $cv(G)$: тъй като G не е пълен граф, може да изберем v така, че $N \neq V \setminus \{v\}$, така че $G - N$ е несвързан граф. Но тогава $cv(G) \leq |N|$, тоест, $cv(G) \leq d_G(v)$. Следователно, $cv(G) \leq ce(G)$.

Задача 3: Нека G е планарен Хамилтонов мултиграф. Нека $\mathcal{G}$ е планарно вписване на G. Нека C е Хамилтонов цикъл в G. Нека $\mathcal{C}$ е образът на C при планарното вписване; $\mathcal{C}$ е обединението от планарните върхове и планарните ребра, съответстващи на C.

Планарният цикъл $\mathcal{C}$ разделя равнината на вътрешна част $\mathcal{I}$ и външна част $\mathcal{O}$. Нека i_k е броят на лицата от степен k, които са в $\mathcal{I}$. Нека o_k е броят на лицата от степен k, които са в $\mathcal{O}$.

Докажете, че

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (k-2)(i_k - o_k) = 0$$

Решение: Ще докажем по-силно твърдение: ако n е броят на върховете в графа, то

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (k-2) i_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k-2) o_k = n - 2$$

БОО, ще докажем само $\sum_{k \in \mathbb{N}} (k-2) i_k = n - 2$. Доказателството за външната част е напълно аналогично.

И така, ще докажем, че

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (k-2) i_k = n - 2 \tag{1}$$

Формално, индексната променлива k взема стойности от безкрайното множество на естествените числа, но забележете, че $i_k = 0$ за $k = 0$, понеже лица от степен 0 няма, и $i_k = 0$ за $k > n$, понеже всички планарни върхове са в $\mathcal{C}$, така че лица от степен, по-голяма от n, няма. Поради това може да мислим, че индексната променлива k взема стойности от $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Страни́чна забележка: $i_1 > 0$ тстк в графа има примки, а $i_2 > 0$ тстк графът е "истински" мултиграф, тоест, има поне един сноп с поне две паралелни ребра, поради което има лица от степен 2.

Лявата страна на 1 е $\sum_k (k-2) i_k$, което е същото като $\left(\sum_k k \cdot i_k\right) - 2 \sum i_k$. Нека L е множеството от планарните ребра, които се намират вътре в $\mathcal{I}$; планарните ребра, които са от $\mathcal{C}$, не са в L. Нека $\ell = |L|$.

- Твърдим, че $\sum_k k \cdot i_k = n + 2\ell$. Наистина, в сумата $\sum_k k \cdot i_k$, всяко планарно ребро от $\mathcal{C}$ участва веднъж, а всяко планарно ребро от L участва два пъти, понеже се явява общо ребро за две различни лица, намиращи се в $\mathcal{I}$.

- Твърдим, че $\sum_k i_k = \ell + 1$. Това може да се докаже лесно по индукция по ℓ, ако имаме предвид, че $\sum_k i_k$ всъщност е броят на всички лица от вътрешността.

  Базовият случай е $\ell = 0$, което означава, че има точно едно вътрешно лице, което се отражда от $\mathcal{I}$. Тогава $\sum_k i_k = 1$. От друга страна, $\ell + 1 = 1$. Доказахме базовия случай.

  Да допуснем, че твърдението е вярно за някое ℓ, което е по-голямо от нула. Тогава L е непразно. Изтриваме произволно планарно ребро $e \in L$, с което $|L|$

намалява с единица, но и броят на лицата намалява с единица, защото тези две лица, за които e беше общо планарно ребро, се сливат в едно лице. Тогава от индуктивното предположение имаме $(\sum_k i_k) - 1 = \ell$. Връщаме изтритото ребро e, с което добавяме по една единица от двете страни на равенството и виждаме, че наистина $\sum_k i_k = \ell + 1$.

Отново разглеждаме лявата страна на (1), която е $(\sum_k k \cdot i_k) - 2 \sum i_k$. Вече доказахме, че $\sum_k k \cdot i_k = n + 2\ell$ и $\sum_k i_k = \ell + 1$. Тогава имаме право да напишем лявата страна на (1) като $n + 2\ell - 2(\ell + 1)$, което е $n - 2$. Доказахме (1).

Задача 4: Нека ϕ е КНФ. Казваме, че ϕ е *удовлетворима*, ако съществува валюация на нейните променливи, такава че стойността на ϕ под тази валюация е 1. Като пример, ако $\phi = (x_1 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$, то ϕ е удовлетворима от валюацията t, където $t(x_1) = 1$, $t(x_2) = 1$ и $t(x_3) = 0$.

Нека $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ е множество от булеви променливи. Конструирайте Съвършена КНФ α над X, такава че α не е удовлетворима. Обосновете формално и прецизно конструкцията.

Решение: Формула е неудовлетворима тстк нейната семантика е функцията константа-нула. В случая се иска СъвКНФ на 0000 0000, като променливите са x_1, x_2 и x_3. От изучаваното на лекции, всяка ф-я, която не е константа-единица, има една единствена СъвКНФ. На константа-нула, СъвКНФ е

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$
$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$