Примерни решения на задачите от изпита по Дискр. Стр-ри на Информатика, 29 юни 2024 г.

Зад. 1 Нека $G = (V, E)$ е граф. Докажете, че ако $m < n$, то G има свързана компонента, която е дърво.

Решение: Нека свързаните компоненти на G са $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, ..., $G_k = (V_k, E_k)$, където $1 \leqslant k \leqslant n$. Очевидно

$$n = \sum_{i=1}^{k} |V_i|$$

$$m = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$$

Тогава съществува свързана компонента $G_j = (V_j, E_j)$, такава че $|E_j| < |V_j|$; ако допуснем обратното, веднага получаваме противоречие с факта, че $m < n$.

Но свързан граф, ребрата на който са по-малко от върховете, е дърво. Тогава G_j е дърво. $\square$

Зад. 2 Нека $p, q \in \mathbb{N}^+$. Намерете диаметъра и радиуса на $K_{p,q}$.

Решение: Ако $p = q = 1$, всеки от двата върха има ексцентрицитет 1, така че $\mathrm{diam}(K_{1,1}) = \mathrm{rad}(K_{1,1}) = 1$.

Ако $p = 1$ и $q > 1$, нека v е върхът от дяла със само един връх. Тогава ексцентрицитетът на v е 1, а останалите върхове имат ексцентрицитет 2. Тогава $\mathrm{diam}(K_{1,q}) = 2$, а $\mathrm{rad}(K_{1,q}) = 1$.

Ако $p > 1$ и $q > 1$, всеки връх има ексцентрицитет 2, така че $\mathrm{diam}(K_{p,q}) = \mathrm{rad}(K_{p,q}) = 2$. $\square$

Зад. 3 Нека k и n са цели положителни числа, като $n \geqslant 4$. Известно е, че $\frac{n}{2} < k < n$. В равнината има n точки, като нито три от тях не лежат на една права. Известно е, че всяка точка е свързана чрез отсечки с поне k други точки. Докажете, че съществуват три такива отсечки, които образуват триъгълник.

Решение: Нека множеството от въпросните n точки се казва S. Нека x и y са две точки от S, които са свързани с отсечка. Такива съществуват, понеже $k \geqslant 3$. Нека

$$A = \{a \in S \mid a \text{ е свързана с } x \text{ чрез отсечка}\}$$
$$B = \{a \in S \mid a \text{ е свързана с } y \text{ чрез отсечка}\}$$

Очевидно $y \in A$ и $x \in B$. Нека $A' = A \setminus \{y\}$ и $B' = B \setminus \{x\}$. Очевидно $|A'| \geqslant k-1$ и $|B'| \geqslant k-1$.

Забелязваме, че $A' \cup B' \subseteq S \setminus \{x, y\}$, откъдето заключаваме, че $|A' \cup B'| \leqslant n-2$.

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|A' \cup B'| = |A'| + |B'| - |A' \cap B'|$$

Щом $|A'| \geqslant k-1$ и $|B'| \geqslant k-1$, в сила е $|A'| + |B'| \geqslant 2k-2$. Тогава

$$|A' \cup B'| \geqslant 2k - 2 - |A' \cap B'|$$

Но $n - 2 \geqslant |A' \cup B'|$. Тогава

$$n - 2 \geqslant 2k - 2 - |A' \cap B'|$$

Тогава

$$n - 2k \geqslant -|A' \cap B'|$$

Тогава

$$|A' \cap B'| \geqslant 2k - n$$

Но по условие, $\frac{n}{2} < k$, така че $2k - n > 0$. Тогава $|A' \cap B'| > 0$. Тогава A' и B' имат общ елемент. Това е някаква точка z, която е свързана с отсечка ZX с x и е свързана с отсечка ZY с y. По конструкция, x и y също са свързани с отсечка, да я наречем XY. Тъй като нито три точки не са колинеарни, отсечките XY, ZX и ZY образуват триъгълник. $\square$

Зад. 4 Нека $G = (V, E)$ е граф, такъв че $n \geqslant 4$. Нека $\Delta(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ и $\delta(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Докажете, че G е свързан.

Решение: Нека u е връх от максимална степен в G. Тогава $N(u) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. За да докажем, че G е свързан, достатъчно е да докажем, че всеки връх v, такъв че $v \notin N(u)$, има общ съсед с u.

Нека $v \in V$ и $v \notin N(u)$. Очевидно $N(v) \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Тъй като u и v не са съседи и в графа няма примки, в сила е

$$N(u) \subseteq V \setminus \{u, v\}$$
$$N(v) \subseteq V \setminus \{u, v\}$$

Тогава

$$|N(u) \cap N(v)| \leqslant n - 2$$

което е същото като

$$-|N(u) \cap N(v)| \geqslant -(n - 2)$$

Съгласно принципа на включването и изключването, в сила е

$$|N(u) \cup N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cap N(v)|$$

Тогава

$$|N(u) \cap N(v)| = |N(u)| + |N(v)| - |N(u) \cup N(v)|$$

Но $|N(u)| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $N(v) \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ и $-|N(u) \cap N(v)| \geqslant -(n - 2)$. Тогава

$$|N(u) \cap N(v)| \geqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 - (n - 2)$$

Забелязваме, че $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$ за всяко n; това се доказва тривиално с разглеждане на случаите n е четно и n е нечетно. Тогава

$$|N(u) \cap N(v)| \geqslant n - 1 - (n - 2) = n - 1 - n + 2 = 1$$

Доказахме, че u и v имат общ съсед. $\square$

Зад. 5 За всяко $n \geqslant 0$, n-тото число на Фибоначи, което записваме с "F_n", се дефинира така:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Докажете, че за всяко $k \in \mathbb{N}^+$ е изпълнено $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{bmatrix}$.

Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и $m \in \mathbb{N}$. Докажете, че

$$F_{n+m} = F_m F_{n-1} + F_n F_{m+1}$$

Решение: Ще докажем първото твърдение по индукция по k. Базата е $k = 1$. Очевидно е вярно, че

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{bmatrix}$$

Индуктивното допускане е, че $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{k-1} = \begin{bmatrix} F_{k-2} & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}$. Тогава

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{k-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-2} & F_{k-1} \\ F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 \cdot F_{k-2} + 1 \cdot F_{k-1} & 1 \cdot F_{k-2} + 1 \cdot F_{k-1} \\ 0 \cdot F_{k-1} + 1 \cdot F_k & 1 \cdot F_{k-1} + 1 \cdot F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{bmatrix}$$

Доказахме твърдението.

Сега ще докажем второто твърдение като използваме това, което току-що доказахме. Съгласно току-що доказаното, ако $m, n \in \mathbb{N}^+$. в сила е

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+m} = \begin{bmatrix} F_{n+m-1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m+1} \end{bmatrix}$$

Но умножението на матрици е асоциативно, така че

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{n+m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^m \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

Тогава

$$\begin{bmatrix} F_{n+m-1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{m-1} & F_m \\ F_m & F_{m+1} \end{bmatrix}$$

Извършваме умножението вдясно и получаваме

$$\begin{bmatrix} F_{n+m-1} & F_{n+m} \\ F_{n+m} & F_{n+m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n-1}F_{m-1} + F_nF_m & F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \\ F_nF_{m-1} + F_{n+1}F_m & F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} \end{bmatrix}$$

Но тогава $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ за всички цели положителни m и n. Забелязваме, че при $m = 0$ този израз става

$$F_n = F_{n-1}F_0 + F_nF_1 = F_{n-1} \cdot 0 + F_n \cdot 1 = F_n$$

Ерго, тъждеството остава в сила и при $m = 0$. Тогава $n \in \mathbb{N}^+$ и $m \in \mathbb{N}$, в сила е

$$F_{n+m} = F_m F_{n-1} + F_n F_{m+1}. \qquad \square$$

Зад. 6 Обяснете какво означава "множество от булеви функции е пълно".

С "$\mathcal{F}$" означаваме множеството от булевите функции. Дефинираме $enum : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$ по следния начин:

- за всяко $n \in \mathbb{N}$, ако $f \in \mathcal{F}^n$ и $g \in \mathcal{F}^{n+1}$, то $enum(f) < enum(g)$,
- за всяко $n \in \mathbb{N}$, ако $f, g \in \mathcal{F}^n$ и $f \neq g$, то $enum(f) < enum(g)$ тогава и само тогава, когато каноничното представяне на f предхожда лексикографски каноничното представяне на g.

Може да приемете за очевидно, че $enum$ е биекция. Нека F е следното множество от булеви функции:

$$F = \{enum^{-1}(12), enum^{-1}(19)\}$$

Докажете, че F е пълно.

Решение: $enum^{-1}(12)$ е функцията сума по модул две, а $enum^{-1}(19)$ е функцията импликация, така че $F = \{\oplus, \to\}$. Ще докажем, че F е пълно. За целта първо ще докажем, че множеството от булевите функции дизюнкция и отрицание е пълно. Използваме наготово теоремата на Boole, която казва, че $\{\wedge, \vee, \overline{x}\}$ е пълно. Наистина, $x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ съгласно законите за двойното отрицание и закона на De Morgan. Следователно, $\{\vee, \overline{x}\}$ е пълно.

Сега ще докажем, че F е пълно.

- Известно е, че $x \to y = \overline{x} \vee y$. Тогава $x \to x = \overline{x} \vee x = \mathbf{1}$. Но $1 \oplus x = \overline{x}$. Тогава

$$\overline{x} = (x \to x) \oplus x$$

- Щом $x \to y = \overline{x} \vee y$, в сила е $\overline{x} \to y = \overline{\overline{x}} \vee y = x \vee y$. Тогава

$$x \vee y = ((x \to x) \oplus x) \to y$$

$\square$