Примерни решения на задачите от поправителния изпит-задачи по Дискретни Стр-ри на Информатика и Компютърни Науки, 2 поток, 24 август 2024

Зад. 1 Нека $S(n)$ е множеството от думите (стринговете) с дължина n над азбуката $\{\mathbf{А}, \mathbf{Б}, \mathbf{В}\}$, които съдържат нечетен брой букви **В**.

а) Намерете рекурентно уравнение за $|S(n)|$.

б) Решете това уравнение.

Решение: За краткост и прегледност, нека y_n означава $|S(n)|$. Изразено чрез тази нотация, търсим рекурентно уравнение за y_n. Очевидно $S(1) = \{\mathbf{В}\}$, така че $y_1 = 1$. За по-големи стойности на аргумента разсъждаваме така.

- Ако дума от $S(n)$ започва с **А** или **Б**, то поддумата от останали букви е елемент на $S(n-1)$, защото съдържа нечетен брой букви **В**. Нещо повече, съществува очевидна биекция между множеството от думите от $S(n)$, започващи с **А**, и $S(n-1)$. Аналогично, съществува очевидна биекция между множеството от думите от $S(n)$, започващи с **Б**, и $S(n-1)$. Следователно, точно y_{n-1} думи от $S(n)$ започват с **А** и точно y_{n-1} думи от $S(n)$ започват с с **Б**. Тъй като дума не може да започва хем с **А**, хем с **Б**, съгласно принципа на разбиването, броят на думите от $S(n)$, започващи с **А** или **Б**, е $2y_{n-1}$.

- Ако дума от $S(n)$ започва с **В**, то поддумата от останалите букви съдържа четен брой букви **В**. Нека $T(k)$ е множеството от думите с дължина k над $\{\mathbf{А}, \mathbf{Б}, \mathbf{В}\}$, съдържащи четен брой букви **В**, където $k \in \mathbb{N}^+$. Съществува очевидна биекция между $S(n)$ и $T(n-1)$.

  Очевидно $\{\mathbf{А}, \mathbf{Б}, \mathbf{В}\}^k$ се разбива на $S(k)$ и $T(k)$. Тогава $|T(k)| = |\{\mathbf{А}, \mathbf{Б}, \mathbf{В}\}^k| - |S(k)|$, по принципа на изваждането. Предвид факта, че $|\{\mathbf{А}, \mathbf{Б}, \mathbf{В}\}^k| = 3^k$, в сила е $|T(n-1)| = 3^{n-1} - y_{n-1}$. Заключаваме, че броят на думите от $S(n)$, започващи с **В**, е $3^{n-1} - y_{n-1}$.

По принципа на разбиването, за $n > 1$ е в сила

$$y_n = 2y_{n-1} + 3^{n-1} - y_{n-1} = y_{n-1} + 3^{n-1}$$

Търсеното рекурентно уравнение е

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1, \\ y_{n-1} + \frac{n^0}{3} 3^n, & \text{ако } n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Да решим (1). Характеристичното уравнение е $x - 1$ с мултимножество от корените $\{1\}_M$. От нехомогенната част “идват” $0 + 1 = 1$ корена 3, така че в крайна сметка мултимножеството е $\{1, 3\}_M$. Тогава общото решение е

$$y_n = C1^n + D3^n = C + D3^n$$

за някакви константи C и D. Тези константи ще намерим с помощта на началните условия. Трябва ни още едно начално условие за $n = 2$. $y_2 = y_1 + 3 = 1 + 3 = 4$. Тогава

$$1 = C + 3D$$
$$4 = C + 9D$$

Решението на системата е $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$. Тогава решението на (1) е

$$y_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$$

Зад. 2 Нека $n, k, \ell \in \mathbb{N}^+$, като $k + \ell \leq n$. Докажете **с комбинаторни съображения** следното тъждество:

$$\sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \binom{n-j}{\ell} = \binom{n}{k+\ell}$$

Решение: Нека са дадени n човека, наредени в редица. По колко начина може да изберем от тези хора една група K от k човека и друга група L от ℓ човека, така че всеки човек от група K да се намира вляво в редицата от всеки човек от група L? И двете страни на даденото тъждество са отговор на тази задача.

Дясната страна $\binom{n}{k+\ell}$ дава директен отговор: всяко избиране на $k + \ell$ човека измежду дадените ни дава и K, и L, понеже първите отляво надясно k на брой ще бъдат група K, а останалите ще бъдат група L.

Лявата страна $\sum_{j=k}^{n-\ell} \binom{j-1}{k-1} \binom{n-j}{\ell}$ дава отговор чрез разбиване по позицията в редицата на най-десния от група K. Неговата позиция е номер j, като $j \geq k$, защото той може да е най-малко номер k в редицата отляво надясно, а също така $j \leq n - \ell$, защото вдясно от него са всички ℓ на брой хора от група L. Накратко, $j \in \{k, k+1, \ldots, n-\ell\}$. За всяка позиция j на най-десния човек от група K, броят на възможните избори на двете групи K и L е произведението от:

- броя на избиранията на останалите, $k - 1$ на брой хора от K измежду най-левите $j - 1$ на брой хора в редицата, като този брой е $\binom{j-1}{k-1}$,

- и броя на избиранията на ℓ човека измежду тези, които се намират вдясно от човека на позиция j; тези, които са вдясно от позиция j, са $n - j$ на брой, така че става дума за избор на ℓ човека от общо $n - j$; броят на тези избирания е $\binom{n-j}{\ell}$.

И така, за всяка позиция j на най-десния човек от група K, броят на възможните избори на двете групи K и L е $\binom{j-1}{k-1}\binom{n-j}{\ell}$. Прилагаме принципа на разбиването и заключаваме, че лявата страна също брои начините да изберем K и L при ограничението всеки човек от K да е вляво от всеки човек от L в редицата.

Зад. 3 Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Нека $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Разглеждаме крайните непразни редици, чиито елементи са от A. Всяка такава редица с дължина k ще наричаме накратко k-редица. За всяка k-редица $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ ще казваме, че x е *особена*, ако $x_i \neq x_{i+1}$ за $1 \leq i < k$ и че е *интересна*, ако е особена и освен това $x_1 \neq x_k$.

- Намерете броя на особените k-редици.
- Докажете, че броят на интересните k-редици е

$$(n-1)^k + (-1)^k(n-1)$$

Решение: Броят на особените k-редици намираме по начин, аналогичен на начина, по който намерихме на лекции броя на комбинаторните конфигурации с наредба и без повтаряне: строим особена k-редица $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ отляво надясно и съобразяваме колко възможности има за всяка позиция. За x_1 има n възможности, защото това може да е всеки елемент на A. За x_2 има само $n-1$ възможности, защото трябва да се различава от x_1. За x_3 има само $n-1$ възможности, защото трябва да се различава от x_2. И така нататък. За x_k има само $n-1$ възможности, защото трябва да се различава от x_{k-1}. Тогава търсеният брой е

$$n(n-1)^{k-1}$$

като множителят $(n-1)^{k-1}$ е броят на възможностите за подредицата от x_2 до x_k.

Ще докажем по индукция по k, че броят на интересните k-редици е $(n-1)^k + (-1)^k(n-1)$. Забележете, че индукцията е по k, а n е фиксирано.

Базата е $k = 1$, понеже редиците са непразни по условие. От една страна, интересни 1-редици няма, защото условието $x_1 \neq x_k$ става $x_1 \neq x_1$ при $k = 1$. С други думи, броят на интересните 1-редици е 0. От друга страна,

$$(n-1)^1 + (-1)^1(n-1) = n - 1 - (n-1) = 0$$

Твърдението е вярно в базовия случай.

Да допуснем, че за произволно цяло положително k е вярно, че броят на интересните k-редици е $(n-1)^k + (-1)^k(n-1)$. Ще докажем, че броят на интересните $(k+1)$-редици е

$$(n-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(n-1) \tag{2}$$

Да дефинираме, че редица е *безинтересна*, ако е особена и не е интересна; тоест, е особена, но първият и последният елемент съвпадат. Очевидно е, че броят на интересните $(k+1)$-редици е равен на броя на особените $(k+1)$-редици минус броя на безинтересните $(k+1)$-редици. Но ние знаем от предната подзадача, че броят на особените $(k+1)$-редици е

$$n(n-1)^k$$

Търсим броя на безинтересните $(k+1)$-редици. Разгледаме произволна безинтересна $(k+1)$-редица x, написана с ограниченията-неравенства

$$x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \cdots \neq x_k \neq x_{k+1} = x_1$$

Ясно е, че подредицата от първите k елемента определя x напълно, понеже x_{k+1} повтаря x_1. Подредицата от първите k елемента обаче е интересна k-редица, защото нейният последен елемент x_k е различен от нейния първи елемент x_1:

$$\underbrace{x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \cdots \neq x_k}_{\text{интересна } k\text{-редица}} \neq x_{k+1} = x_1$$

Заключаваме, че броят на безинтересните $(k+1)$-редици е равен на броя на интересните k-редици, който, съгласно индуктивното предположение, е $(n-1)^k + (-1)^k(n-1)$.

Следователно, броят на интересните $(k+1)$-редици е

$$n(n-1)^k - ((n-1)^k + (-1)^k(n-1)) = n(n-1)^k - (n-1)^k + (-1)^{k+1}(n-1) =$$
$$(n-1)^k(n-1) + (-1)^{k+1}(n-1) = (n-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}(n-1)$$

Но това е точно (2). С което доказахме желаното твърдение.

Зад. 4 Дадено е множество от върхове $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

а) Колко графа $G = (V, E)$ има?

б) Нека D е множеството от графите $G = (V, E)$, такива че $|E| = 4$. Намерете $|D|$.

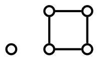
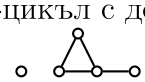
в) Колко графа от D не са дървета?

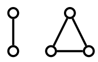
д) Колко дървета с пет върха има? Става дума за именувани графи.

Решение: От лекции знаем, че броят на именуваните графи с n върха е $2^{\binom{n}{2}}$. Тогава броят на графите, чието множество от върхове е V, е $2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = 1\,024$, понеже $|V| = 5$.

Броят на графите с множество от върхове V и 4 ребра е $\binom{10}{4} = 210$, защото броят на двуелементните подмножества на V е $\binom{5}{2} = 10$, а всеки граф от D се определя еднозначно от избора на 4 двуелементни подмножества на V, които са краищата на четирите ребра.

Да преброим графите в D, които не са дървета. Всеки граф, който не е дърво, не е свързан или има цикъл. Но тъй като всеки граф в D има точно 4 ребра, граф от D не е свързан тстк има цикъл. Следователно, достатъчно е да преброим графите в D, които не са свързани. Всеки от тях има повече от една свързана компонента. Но тъй като ребрата на такъв граф са точно 4, той може да има само две свързани компоненти. За да се убедим в последното: ако има три свързани компоненти, те са или K_1, K_1 и K_3 с общо три ребра, или K_1, K_2 и K_2 с общо две ребра, ако има четири свързани компоненти, те са K_1, K_1, K_1 и K_2 с общо едно ребро, а ако има пет свързани компоненти, те са пет на брой K_1 с общо нула ребра. И така, всеки граф в D, който не е дърво, има точно две свързани компоненти.

- Едната свързана компонента е K_1. Тогава другата има 4 върха и за нея има две възможности.
  - Тя е 4-цикъл: 
    Тази възможност отговаря на 15 графа, понеже има 5 възможности за изолирания връх, а за всяка от тях, цикълът може да се построи по $\frac{4!}{2 \times 4} = 3$ неизоморфни начина; $5 \times 3 = 15$.
  - Тя се получава от 3-цикъл с добавяне на още един връх, който става съсед на точно един връх от цикъла: 
    Тази възможност отговаря на 60 графа, понеже има 5 възможности за изолирания връх, за всяка от тях върхът от степен три може да се избере по 4 начина, за всеки от които висящият връх може да се избере по 3 начина; $5 \times 4 \times 3 = 60$.

- Едната свързана компонента е K_2. Тогава другата задължително е K_3: 
  Тази възможност отговаря на 10 графа, понеже по $\binom{5}{2} = 10$ начина можем да изберем двата върха на K_2.

Общо, графите са $15 + 60 + 10 = 85$.

Щом графите в D са 210 и 85 от тях не са дървета, броят на дърветата в D е $210 - 85 = 125$. Това е и броят на именуваните дървета с 5 върха.

Забележка: броят на дърветата с 5 върха се получава лесно от формулата на Cayley n^{n-2}: ако $n = 5$, тя дава $5^3 = 125$. Този теоретичен резултат обаче не е изучаван на лекции и не може да се ползва, освен ако не бъде доказан подробно от първи принципи.