Примерно решение на домашно №2 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Зад. 1 В продължение на една година от 365 дена Иван се упражнява по комбинаторика, решавайки задачи. Всеки ден от тази година той решава поне една задача, но не решава повече от 500 задачи общо за годината. Докажете, че през тази година има интервал от последователни дни, през които Иван решава точно 229 задачи.

Решение: Нека x_i да е броят задачи, решени от Иван на ден i или преди него, за $1 \leq i \leq 365$. Очевидно последователността

$$A = (x_1, x_2, \ldots, x_{365})$$

е строго нарастваща, от което следва, че в нея няма еднакви числа. Освен това, $\forall i, 1 \leq i \leq 365 : 1 \leq x_i \leq 500$. Да разгледаме друга последователност:

$$B = (x_1 + 229, x_2 + 229, \ldots, x_{365} + 229)$$

Тя също е строго нарастваща и в нея също няма еднакви числа. Освен това $230 \leq x_i + 229 \leq 729$. Сега да разгледаме последователността

$$C = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_{365}}_{A}, \underbrace{x_1 + 229, x_2 + 229, \ldots, x_{365} + 229}_{B})$$

Очевидно елементите на C са точно 730 цели положителни числа, понеже C се състои от копие на A, слепено с копие на B. Но за всеки елемент на C има не повече от 729 възможни стойности. Съгласно комбинаторния принцип на Дирихле, има поне два елемента на C с една и съща стойност. Както вече установихме, елементите на A са два по два различни и елементите на B са два по два различни. Следователно, всяка двойка елементи на C с еднаква стойност се състои от един елемент от копието на A и от един елемент от копието на B. С други думи, съществуват индекси j и k, такива че $1 \leq j \leq 365$ и $1 \leq k \leq 365$ и $x_j = x_k + 299$. Това означава, че Иван е решил точно 229 задачи от ден $k+1$ включително до ден j включително. $\square$

Зад. 2 Колко релации на еквивалентност има над множество от 5 елемента?

Решение: Нека множеството е $A = \{a, b, c, d, e\}$. Задачата е същата като задачата, по колко начина можем да разбием A на подмножества – тоест, на класове на еквивалентност. Отговорът е 52, което се смята лесно, ако разгледаме възможностите за броя на класовете. Класовете в дадено разбиване може да са от един до пет:

брой класове	разбивания	брой разбивания с толкова класове
1	$\{\{a, b, c, d, e\}\}$	1
2	$\{\{a, b, c, d\}, \{e\}\}, \ldots, \{\{a\}, \{b, c, d, e\}\}$, $\{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}, \ldots, \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$	5 $\binom{5}{3} = 10$
3	$\{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}\}, \ldots, \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}\}$ $\{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}\}, \ldots, \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$	$\binom{5}{3} = 10$ $\frac{1}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 15$
4	$\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}, \ldots, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$	$\binom{5}{2} = 10$
5	$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$	1

Сумата от числата в третата колона е 52. Резултатът 15 на шестия ред на таблицата се получава със следните разсъждения: по $\binom{5}{2} = 10$ начина можем да изберем два елемента за един клас, по $\binom{3}{2} = 3$ начина можем да изберем от оставащите три елемента, два за друг клас, но произведението $10 \times 3 = 30$ не е верният отговор, защото брои всяко разбиване два пъти. За да получим верния отговор 15, делим на две. Забележете, че $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$ можехме да получим и като мултиномен коефициент $\frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} = 30$. $\square$

Зад. 3 По колко начина може да завърши състезание с пет коня, ако

1. нито два коня не завършват по едно и също време;

2. горното ограничение го няма.

Решение:

1. $5! = 120$.

2. Сега е допустимо два или повече коня да завършват едновременно. Едновременното завършване естествено задава релация на еквивалентност, която може има да един или два или три или четири или пет класа на еквивалентност. За всяка от тези възможности, броят е произведението от броя на класовете и факториела на броя на елементите на един клас. Цялото решение е сумата от посочените количества. Ползвайки решението на Задача 2, имаме

$$1 \times 5! + 10 \times 4! + 25 \times 3! + 15 \times 2! + 1 \times 1! = 541$$

□

Зад. 4 По колко начина можем да сложим 20 еднакви книги в 5 различни кутии? Допускаме, че всяка кутия може да съдържа всички книги.

Решение: По $|\mathsf{K}_{\mathsf{\Pi}}(5, 20)| = \binom{20+5-1}{5-1} = 10\,626$ начина. □

Зад. 5 По колко начина можем да сложим 6 еднакви книги в 4 еднакви кутии? Допускаме, че всяка кутия може да съдържа всички книги.

Решение: Единственото, което различава две такива различни слагания, са бройките на книгите в кутиите, които имат книги. Можем да опишем еднозначно всяко такова слагане чрез вектор от цели положителни числа, които се сумират до 6. За еднозначност нека векторите са сортирани низходящо. Векторите са с дължина не повече от четири, защото кутиите, които можем да ползваме, са четири. Възможните вектори са:

6
$5, 1$
$4, 2$
$4, 1, 1$
$3, 3$
$3, 2, 1$
$3, 1, 1$
$2, 2$
$2, 2, 1, 1$

□

Зад. 6 По колко начина можем да разположим числата $1, 2, \ldots, 10$ на позиции с номера $1, 2, \ldots, 10$, така че:

1. четните числа да отидат на четните позиции, а нечетните числа, на нечетните позиции?
2. четните числа да отидат на четните позиции, нечетните числа, на нечетните позиции, и нито едно нечетно число k да не бъде на позиция с номер k?
3. нито едно нечетно число k да не бъде на позиция с номер k, без да има други ограничения?

Решение:

1. $5! \times 5! = 14\,400$.
2. Броят на пермутациите на n елемента, нито един от които не си е на мястото, можем да получим, прилагайки принципа на включване и изключване:

   $$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)!$$

   За 5 елемента, той е $D_5 = 44$. Отговорът е $5! \times 44 = 5\,280$.
3. Решението може да се получи чрез метода на включване и изключване. Сега няма изискване нечетните числа да са на нечетните позиции, така че универсумът е множеството от всички пермутации, $10!$ на брой. "Неблагоприятните" пермутации са тези, в които нечетни числа са на нечетни позиции; изваждането ще направим поетапно, както следва от принципа на включването и изключването. Един нарушител (едно нечетно число) можем да изберем по 5 начина, при избран нарушител (примерно, числото 3, сложено на позиция номер 3), има $9!$ пермутации, в които нарушителят е сложен на забранената позиция. Два нарушителя можем да изберем по $\binom{5}{2} = 10$ начина и има $8!$ пермутации, в които те са на забранени позиции, и така нататък. Отговорът е:

   $$10! - \binom{5}{1} \times 9! + \binom{5}{2} \times 8! - \binom{5}{3} \times 7! + \binom{5}{4} \times 6! - \binom{5}{5} \times 5! = 2\,170\,680$$

$\square$