Примерни решения на задачите от семестриалното контролно по ДС, КН, 29.11.2013 г., вариант I

Зад. 1 Докажете по индукция, че $11^n - 6$ се дели на 5 за всяко цяло положително n.

Решение: Базовият случай е за $n = 0$. Твърдението става, "$11^0 - 6$ се дели на 5", което очевидно е вярно. Да допуснем, че твърдението е вярно за произволно естествено число n. Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$: "$11^{n+1} - 6$ се дели на 5". Но

$$11^{n+1} - 6 = 11 \times 11^n - 6 = (10+1) \times 11^n - 6 = 10 \times 11^n + 11^n - 6$$

Очевидно 10×11^n се дели на 5, а $11^n - 6$ се дели на 5 от индуктивното предположение. Сумата на числа, делящи се на 5, задължително се дели на 5. С което показахме, че твърдението "$11^{n+1} - 6$ се дели на 5" е вярно. □

Зад. 2 Разгледайте следното доказателство по индукция:

> *Ще докажем, че* $5n+3 = 5(n-2)+8$ *за всяко естествено число* n. *Да допуснем, че твърдението е вярно за някакво естествено* n. *Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента* $n+1$*:*
>
> $$\begin{aligned} &5(n+1)+3 = 5((n+1)-2)+8 \quad \leftrightarrow \quad 5n+5+3 = 5n+5-10+8 \quad \leftrightarrow \\ &(5n+3)+5 = (5n-10+8)+5 \quad \leftrightarrow \quad (5n+3) = (5n-10+8) \quad \leftrightarrow \\ &\qquad 5n+3 = 5(n-2)+8 \end{aligned}$$
>
> *Но последното равенство е именно индукционното предположение и като такова е вярно. Следователно, твърдението е вярно за всяко естествено* n.

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Твърдението очевидно е невярно: отворете скобите вдясно и извадете $5n$ от двете страни. Щом твърдението е невярно, няма как доказателството да е валидно. Грешката в това "доказателство" е липсата на база. Наистина, ако се опитаме да разгледаме базов случай за произволно конкретно естествено число n, ще получим невярно твърдение. □

Зад. 3 Напишете в явен вид множеството $2^{2^{\{\{a\}\}}}$.

Решение: Търси се степенното множество на степенното множество на множеството, чийто единствен елемент е множеството $\{a\}$. И така,

$$2^{\{\{a\}\}} = \{\emptyset, \{\{a\}\}\}$$

и

$$2^{2^{\{\{a\}\}}} = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{a\}\}\}, \{\emptyset, \{\{a\}\}\}\Big\}$$

□

Зад. 4 Даден е квадрат със страна 1 м. Докажете, за произволни пет точки от него е вярно, че съществуват две точки измежду петте, такива че между тях (двете) разстоянието е не повече от 1 м.

Решение: Да си представим диагоналите на квадрата и получените четири равнобедрени правоъгълни триъгълника, които покриват квадрата. Очевидно всеки от тези триъгълници се вписва в окръжност с диаметър единица, следователно всеки две точки в него са на разстояние не повече от единица. Съгласно принципа на Дирихле, за произволни пет точки в квадрата, поне две от тях са в един от тези триъгълници, което означава на разстояние не повече от единица една от друга. □

Зад. 5 За произволна пермутация на числата $1, 2, \ldots, n$, казваме, че е *непоследователна*, ако в нея не се среща нито $1\,2$, нито $2\,3$, ..., нито $(n-1)\,n$. Примерно, нека $n = 4$; непоследователна пермутация е $3\,1\,4\,2$, а пермутацията $1\,3\,4\,2$ не е непоследователна, понеже в нея се среща $3\,4$. Нека X_n означава броя на непоследователните пермутации на $1, 2, \ldots, n$. Намерете формула за X_n, използвайки комбинаторния принцип на включването и изключването.

Решение: Да наречем всяка двойка числа от вида $i\,(i+1)$, *обструкция*. Има общо $n-1$ обструкции: $1\,2$, $2\,3$, …, $(n-1)\,n$. Търси се броят на пермутациите без нито една обструкция. Всички пермутации са $n!$ на брой. Тези от тях, които имат поне една обструкция, са $(n-1)(n-1)!$, защото по $n-1$ начина можем да подберем обструкцията и след това да гледаме на нея като на блокче, а на всяко от останалите числа също като на блокче; общо има $1+n-2=n-1$ блокчета, които може да бъдат наредени по $(n-1)!$ начина в редица.

Пермутациите с поне две обструкции са $\binom{n-1}{2}(n-2)!$ на брой, защото двете обструкции можем да подберем по $\binom{n-1}{2}$ начина, след което да ги разглеждаме като блокчета, а останалите числа също като блокчета. Независимо от това дали тези две блокчета се припокриват или не, общо има $n-2$ блокчета, които може да бъдат наредени по $(n-2)!$ начина в редица.

Обобщаваме, че има $\binom{n-1}{k}(n-k)!$ пермутации с поне k обструкции. Съгласно принципа на включването и изключването, отговорът е

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

$\square$

Зад. 6 Плочкаджия трябва да покрие с плочки стена с размери 2 м. на 4 м. Всяка плочка е с размери 20 см. на 20 см., а цветът ѝ е или зелен, или червен. Общо плочките са 200 на брой: 80 зелени и 120 червени. Плочките се редят плътно една до друга и не е разрешено да се режат, следователно трябва да бъдат наредени в конфигурация от 10 реда и 20 колони. Зелените плочки са неразличими помежду си и червените плочки са неразличими помежду си. По колко начина може да бъде направено покриването, ако:

- Няма ограничения.
- ***БОНУС 20 точки:*** *Във всеки ред зелените плочки, ако има такива, са вляво от червените, ако има такива.*

Решение: В първото (не-бонус) подусловието е достатъчно да съобразим, че двумерната наредба на плочките няма никакво значение за търсения брой на възможните покривания. Възможните покривания са точно толкова (по принципа на биекцията), колкото са възможностите да бъдат наредени в линейна наредба 80 зелени и 120 червени плочки. С други думи, това са възможностите да изберем 80 плочки от общо 200. Броят е

$$\binom{200}{80} = 1\,647\,278\,652\,451\,762\,678\,788\,128\,833\,110\,870\,712\,983\,038\,446\,517\,480\,945\,400 \approx 10^{57}$$

Численият отговор е само за Ваша информация, биномният коефициент е напълно достатъчен.

Във второто подусловие, първо съобразяваме следното. Както и в предишното подусловие, разполагането на зелените плочки напълно определя разполагането на червените – червените се слагат на 120-те свободни места. Но в сегашното подусловие, зелените плочки се редят плътно вляво. На някои редове може изобщо да няма зелени плочки, на други може да са само зелени плочки, а ако има и от двата вида, зелените са вляво. Ясно е, че за всеки ред, **бройката** на зелените плочки—число между нула и двадесет включително—определя напълно подреждането в този ред. Тогава цялата наредба (върху стената) се определя от десет числа, всяко от което е между нула и двадесет включително, и всички тези числа се сумират до 80.

Внимание – редовете са различими! Примерно, слагането на 19 зелени плочки на първи ред, 13 на втори и по 6 на всички останали редове е **различно** слагане от 13 зелени плочки на първи ред, 19 на втори и по 6 на всички останали редове. Следователно, става дума не за множество от числа, а за вектор от числа, които се сумират до 80.

Задачата е същата като задачата, колко решения в естествени числа има уравнението

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=80$$

при ограниченията

$$
\begin{aligned}
&0 \leq x_1 \leq 20\\
&0 \leq x_2 \leq 20\\
&0 \leq x_3 \leq 20\\
&0 \leq x_4 \leq 20\\
&0 \leq x_5 \leq 20\\
&0 \leq x_6 \leq 20\\
&0 \leq x_7 \leq 20\\
&0 \leq x_8 \leq 20\\
&0 \leq x_9 \leq 20\\
&0 \leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}
$$

Ако ограниченията бяха само $0 \leq x_i$, $1 \leq i \leq 10$, отговорът щеше да е

$$\binom{80+10-1}{10-1} = \binom{89}{9} = 635\,627\,275\,767$$

тъй като при тези (по-прости) ограничения става дума за комбинаторни конфигурации без наребда, с повтаряне, с размер 80 над опорно множество с мощност 10: все едно имаме линейна наредба от 80 единици и се пита, по колко начина може да сложим 9 разделителя между тях.

При по-сложните ограничения от вида $0 \leq x_i \leq 20$, $1 \leq i \leq 10$, каквито са нашата задача, може да мислим за множеството от $\binom{89}{9}$ решения като за универсум U. Нека $B_i \subseteq U$ е множеството от тези решения, в които $x_i > 20$, за $1 \leq i \leq 10$. Очевидно ние търсим $|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6} \cap \overline{B_7} \cap \overline{B_8} \cap \overline{B_9} \cap \overline{B_{10}}|$. По принципа на включването и изключването,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 10} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 10} |B_i \cap B_j| - \ldots + (-1)^{10} |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{10}|$$

Сега да съобразим, че няма как повече от три x_i-та да бъдат по-големи от 20: ако четири са по-големи от 20 всяко, то сумата ще надхвърли 80. С други думи, достатъчно е да разгледаме тези събираеми в израза на включването и изключването, в които има сечение на най-много три B-та:

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 10} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 10} |B_i \cap B_j| - \sum_{\substack{1 \leq i < j < \\ k \leq 10}} |B_i \cap B_j \cap B_k|$$

От общи съображения е ясно, че B-тата имат една и съща мощност и сеченията им по двойки имат една и съща мощност и сеченията по тройки имат една и съща мощност и сеченията им по четворки имат една и съща мощност. Следователно,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \binom{10}{1} |B_1| + \binom{10}{2} |B_1 \cap B_2| - \binom{10}{3} |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

За да получим $|B_1|$ е достатъчно да съобразим, че бройката решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 80$$

при ограниченията

$$
\begin{aligned}
&21 \leq x_1\\
&0 \leq x_2 \leq 20\\
&0 \leq x_3 \leq 20\\
&0 \leq x_4 \leq 20\\
&0 \leq x_5 \leq 20\\
&0 \leq x_6 \leq 20\\
&0 \leq x_7 \leq 20\\
&0 \leq x_8 \leq 20\\
&0 \leq x_9 \leq 20\\
&0 \leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}
$$

е същата като бройката на решенията на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 59$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
&0 \leq x_1 \\
&0 \leq x_2 \leq 20 \\
&0 \leq x_3 \leq 20 \\
&0 \leq x_4 \leq 20 \\
&0 \leq x_5 \leq 20 \\
&0 \leq x_6 \leq 20 \\
&0 \leq x_7 \leq 20 \\
&0 \leq x_8 \leq 20 \\
&0 \leq x_9 \leq 20 \\
&0 \leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}$$

Следователно,

$$|B_1| = \binom{59+9}{9} = \binom{68}{9} = 49\,280\,065\,120$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
|B_1 \cap B_2| &= \binom{38+9}{9} = \binom{47}{9} = 1\,362\,649\,145 \\
|B_1 \cap B_2 \cap B_3| &= \binom{17+9}{9} = \binom{26}{9} = 3\,124\,550
\end{aligned}$$

Крайният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = \binom{89}{9} - \binom{10}{1}\binom{68}{9} + \binom{10}{2}\binom{47}{9} - \binom{10}{3}\binom{26}{9} = 203\,770\,890\,092$$