Примерни решения на задачите от семестриалното контролно по ДС, КН, 29.11.2013 г., вариант II

Зад. 1 Докажете по индукция, че за $3^n - 1$ е четно число за всяко естествено n.

Решение: Базовият случай е за $n = 0$. Твърдението става, "$3^0 - 1$ е четно", което очевидно е вярно. Да допуснем, че твърдението е вярно за произволно естествено число n. Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n + 1$: "$3^{n+1} - 1$ е четно число". Но

$$3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1 = (2 + 1) \times 3^n - 1 = 2 \times 3^n + 3^n - 1$$

Очевидно 2×3^n е четно число за всяко естествено n, а $3^n - 1$ е четно от индуктивното предположение. Сумата на четни числа задължително е четно число. С което показахме, че твърдението "$3^{n+1} - 1$ е четно число" е вярно. □

Зад. 2 Напишете в явен вид множеството $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}}$.

Решение: $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$. □

Зад. 3 Плочкаджия трябва да покрие с плочки стена с размери 3 м. на 6 м. Всяка плочка е с размери 30 см. на 30 см., а цветът ѝ е или бял, или черен. Общо плочките са 200 на брой: 100 бели и 100 черни. Плочките се редят плътно една до друга и не е разрешено да се режат, следователно трябва да бъдат наредени в конфигурация от 10 реда и 20 колони. Белите плочки са неразличими помежду си и черните плочки са неразличими помежду си. По колко начина може да бъде направено покриването, ако:

- Няма ограничения.
- ***БОНУС 20 точки:*** *Във всеки ред белите плочки, ако има такива, са вляво от черните, ако има такива.*

Решение: В първото (не-бонус) подусловие е достатъчно да съобразим, че двумерната наредба на плочките няма никакво значение за търсения брой на възможните покривания. Възможните покривания са точно толкова (по принципа на биекцията), колкото са възможностите да бъдат наредени в линейна наредба 100 бели и 100 черни плочки. С други думи, това са възможностите да изберем 100 плочки от общо 200. Броят е

$$\binom{200}{100} = 90\,548\,514\,656\,103\,281\,165\,404\,177\,077\,484\,163\,874\,504\,589\,675\,413\,336\,841\,320 \approx 90 \times 10^57$$

Численият отговор е само за Ваша информация, биномният коефициент е напълно достатъчен.

Във второто подусловие, първо съобразяваме следното. Както и в предишното подусловие, разполагането на белите плочки напълно определя разполагането на черните – черните се слагат на стоте свободни места. Но в сегашното подусловие, белите плочки се редят плътно вляво. На някои редове може изобщо да няма бели плочки, на други може да са само бели плочки, а ако има и от двата вида, белите са вляво. Ясно е, че за всеки ред, **бройката** на белите плочки—число между нула и двадесет включително—определя напълно подреждането в този ред. Тогава цялата наредба (върху стената) се определя от десет числа, всяко от което е между нула и двадесет включително, и всички тези числа се сумират до сто.

Внимание – редовете са различими! Примерно, слагането на 11 бели плочки на първи ред, 9 на втори и по 10 на всички останали редове е **различно** слагане от 9 бели плочки на първи ред, 11 на втори и по 10 на всички останали редове. Следователно, става дума не за множество от числа, а за вектор от числа, които се сумират до сто.

Задачата е същата като задачата, колко решения в естествени числа има уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 100$$

при ограниченията

$$\begin{aligned} 0 &\le x_1 \le 20 \\ 0 &\le x_2 \le 20 \\ 0 &\le x_3 \le 20 \\ 0 &\le x_4 \le 20 \\ 0 &\le x_5 \le 20 \\ 0 &\le x_6 \le 20 \\ 0 &\le x_7 \le 20 \\ 0 &\le x_8 \le 20 \\ 0 &\le x_9 \le 20 \\ 0 &\le x_{10} \le 20 \end{aligned}$$

Ако ограниченията бяха само $0 \le x_i$, $1 \le i \le 10$, отговорът щеше да е

$$\binom{100+10-1}{10-1} = \binom{109}{9} = 4\,263\,421\,511\,271$$

тъй като при тези (по-прости) ограничения става дума за комбинаторни конфигурации без наребда, с повтаряне, с размер 100 над опорно множество с мощност 10: все едно имаме линейна наредба от сто единици и се пита, по колко начина може да сложим 9 разделителя между тях.

При по-сложните ограничения от вида $0 \le x_i \le 20$, $1 \le i \le 10$, каквито са нашата задача, може да мислим за множеството от $\binom{109}{9}$ решения като за универсум U. Нека $B_i \subseteq U$ е множеството от тези решения, в които $x_i > 20$, за $1 \le i \le 10$. Очевидно ние търсим $|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6} \cap \overline{B_7} \cap \overline{B_8} \cap \overline{B_9} \cap \overline{B_{10}}|$. По принципа на включването и изключването,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \le i \le 10} |B_i| + \sum_{1 \le i < j \le 10} |B_i \cap B_j| - \ldots + (-1)^{10} |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{10}|$$

Сега да съобразим, че няма как повече от четири x_i-та да бъдат по-големи от 20: ако пет са по-големи от 20 всяко, то сумата ще надхвърли 100. С други думи, достатъчно е да разгледаме тези събираеми в израза на включването и изключването, в които има сечение на най-много четири B-та:

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \le i \le 10} |B_i| + \sum_{1 \le i < j \le 10} |B_i \cap B_j| - \sum_{\substack{1 \le i < j < \\ k \le 10}} |B_i \cap B_j \cap B_k| + \sum_{\substack{1 \le i < j < \\ k < t \le 10}} |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_t|$$

От общи съображения е ясно, че B-тата имат една и съща мощност и сеченията им по двойки имат една и съща мощност и сеченията по тройки имат една и съща мощност и сеченията им по четворки имат една и съща мощност. Следователно,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \binom{10}{1} |B_1| + \binom{10}{2} |B_1 \cap B_2| - \binom{10}{3} |B_1 \cap B_2 \cap B_3| + \binom{10}{4} |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4|$$

За да получим $|B_1|$ е достатъчно да съобразим, че бройката решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 100$$

при ограниченията

$$\begin{aligned} 21 &\le x_1 \\ 0 &\le x_2 \le 20 \\ 0 &\le x_3 \le 20 \\ 0 &\le x_4 \le 20 \\ 0 &\le x_5 \le 20 \\ 0 &\le x_6 \le 20 \\ 0 &\le x_7 \le 20 \\ 0 &\le x_8 \le 20 \\ 0 &\le x_9 \le 20 \\ 0 &\le x_{10} \le 20 \end{aligned}$$

е същата като бройката на решенията на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 79$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
&0 \leq x_1 \\
&0 \leq x_2 \leq 20 \\
&0 \leq x_3 \leq 20 \\
&0 \leq x_4 \leq 20 \\
&0 \leq x_5 \leq 20 \\
&0 \leq x_6 \leq 20 \\
&0 \leq x_7 \leq 20 \\
&0 \leq x_8 \leq 20 \\
&0 \leq x_9 \leq 20 \\
&0 \leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}$$

Следователно,

$$|B_1| = \binom{79+9}{9} = \binom{88}{9} = 571\,350\,360\,240$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
|B_1 \cap B_2| &= \binom{58+9}{9} = \binom{67}{9} = 42\,757\,703\,560 \\
|B_1 \cap B_2 \cap B_3| &= \binom{37+9}{9} = \binom{46}{9} = 1\,101\,716\,330 \\
|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| &= \binom{16+9}{9} = \binom{25}{9} = 2\,042\,975
\end{aligned}$$

Крайният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = \binom{109}{9} - \binom{10}{1}\binom{88}{9} + \binom{10}{2}\binom{67}{9} - \binom{10}{3}\binom{46}{9} + \binom{10}{4}\binom{25}{9} = 342\,237\,634\,221$$

□

Зад. 4 Разгледайте следното доказателство по индукция:

Ще докажем, че $7n + 4 = 7(n-2) + 10$ *за всяко естествено число* n. *Да допуснем, че твърдението е вярно за някакво естествено* n. *Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента* $n+1$*:*

$$\begin{aligned}
&7(n+1) + 4 = 7((n+1) - 2) + 10 \quad \leftrightarrow \quad 7n + 7 + 4 = 7n + 7 - 14 + 10 \quad \leftrightarrow \\
&(7n+4) + 7 = (7n - 14 + 10) + 7 \quad \leftrightarrow \quad (7n+4) = (7n - 14 + 10) \quad \leftrightarrow \\
&\qquad 7n + 4 = 7(n-2) + 10
\end{aligned}$$

Но последното равенство е именно индукционното предположение и като такова е вярно. Следователно, твърдението е вярно за всяко естествено n.

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Твърдението очевидно е невярно: отворете скобите вдясно и извадете $7n$ от двете страни. Щом твърдението е невярно, няма как доказателството да е валидно. Грешката в това “доказателство” е липсата на база. Наистина, ако се опитаме да разгледаме базов случай за произволно конкретно естествено число n, ще получим невярно твърдение. □

Зад. 5 Даден е квадрат със страна 14 м. Докажете, че за произволни 50 точки в квадрата, поне две от тях са на разстояние не по-голямо от 3 м.

Решение: Да покрием квадрата с квадратчета 2×2, така че произволни две от тях да имат празно сечение или сечение-страна, но нито две да нямат обща вътрешна точка. За всяко от тези квадратчета е вярно, че произволни негови две точки са на разстоянието не повече от три една от друга. За да съобразите защо, забележете, че всяко квадратче има диагонал < 3, следователно се вписва в окръжност с диаметър < 3. Квадратчетата са общо 49. Съгласно принципа на Дирихле, за произволни 50 точки в големия квадрат е вярно, че поне две от тях са от едно от 49-те квадратчета, тоест на разстояние < 3 една от друга. $\square$

Зад. 6 За произволна пермутация на числата $1, 2, \ldots, n$, казваме, че е *непоследователна*, ако в нея не се среща нито $1\,2$, нито $2\,3$, $\ldots$, нито $(n-1)\,n$. Примерно, нека $n = 4$; непоследователна пермутация е $3\,1\,4\,2$, а пермутацията $1\,3\,4\,2$ не е непоследователна, понеже в нея се среща $3\,4$. Нека X_n означава броя на непоследователните пермутации на $1, 2, \ldots, n$. Намерете формула за X_n, използвайки комбинаторния принцип на включването и изключването.

Решение: Да наречем всяка двойка числа от вида $i\,(i+1)$, *обструкция*. Има общо $n-1$ обструкции: $1\,2$, $2\,3$, $\ldots$, $(n-1)\,n$. Търси се броят на пермутациите без нито една обструкция. Всички пермутации са $n!$ на брой. Тези от тях, които имат поне една обструкция, са $(n-1)(n-1)!$, защото по $n-1$ начина можем да подберем обструкцията и след това да гледаме на нея като на блокче, а на всяко от останалите числа също като на блокче; общо има $1 + n - 2 = n - 1$ блокчета, които може да бъдат наредени по $(n-1)!$ начина в редица.

Пермутациите с поне две обструкции са $\binom{n-1}{2}(n-2)!$ на брой, защото двете обструкции можем да подберем по $\binom{n-1}{2}$ начина, след което да ги разглеждаме като блокчета, а останалите числа също като блокчета. Независимо от това дали тези две блокчета се припокриват или не, общо има $n-2$ блокчета, които може да бъдат наредени по $(n-2)!$ начина в редица.

Обобщаваме, че има $\binom{n-1}{k}(n-k)!$ пермутации с поне k обструкции. Съгласно принципа на включването и изключването, отговорът е

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$$

$\square$