Глава 3

Комбинаторика

Основни понятия

По-долу навсякъде $k \leq n$.

(0+R+) Конфигурации с подредба и с повторение. Също така се наричат пермутации с повторение. Това е броят $P_r(n, k)$ на всички думи с дължина k над n-елементна азбука.

$$n^k$$

Например, всички 3-буквени думи над азбуката $\{a, b, c, d, e\}$ са 5^3 на брой.

(0+R–) Конфигурации с подредба, но без повторение. Съща така се наричат пермутации. Това е броят $P(n, k)$ на k-елементните *подредени* множества на едно n-елементно множество.

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Например, всички 3-буквени думи *без повторения* над азбуката $\{a, b, c, d, e\}$ са 5!4!3! на брой.

(0–R–) Конфигурации без подредба и без повторение. Също така се наричат комбинации. Това е броят $C(n, k)$ на k-елементните подмножества (т.е. елементите *не са подредени*) на едно n-елементно множество. Имаме следната връзка с пермутации без повторение:

$$P(n, k) = C(n, k) \cdot P(k, k),$$

следователно,

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Например, броят на всички комбинации от правилно попълнени фишове в тото 6 от 49 са $\binom{49}{6}$.

(0– R+) Мултимножество е съвкупност от обекти, в които позволяваме повторение на елементи. Например, $\{3, 1, 1, 2, 3\}$ е мултимножество. Конфигурации без подредба, но с повторение. Наричат се още комбинации с повторение. Това е броят на n-елементните мулти-подмножества на едно k-елементно множество и той е:

$$C(n + k - 1, k - 1) = \binom{n + k - 1}{k - 1}.$$

Задача 51. а) Колко битови низове с дължина един байт има ? Отг. 2^8

б) Колко са всички подмножества на множеството A с 8 елемента ?

в) Колко битови низове с дължина един байт започват с 1 завършват с 00 ? Отг. 2^5

г) Всеки потребител на една компютърна система има парола, която е дълга между 6 и 8 символа. Всеки символ е малка или голяма буква, или цифра. Всяка парола трябва да съдържа поне една цифра. Колко такива пароли има? Отг. $62! - 52!$

д) По колко начина можем да подредим елементите $\{a, b, c, d\}$?

е) Колко думи може да се образуват от буквите в $ABCDEFG$, които съдържат ABC.

ж) Колко ралични думи могат да се образуват като разместим буквите на думата $MISSISSIPPI$?

з) Колко ралични думи могат да се образуват като разместим буквите на думата $TENNESSEE$?

и) Колко ралични думи могат да се образуват като разместим буквите на думата $SUCCESS$?

к) Колко ралични думи могат да се образуват като разместим буквите на думата АБРАКАДАБРА?

л) Колко ралични думи могат да се образуват като разместим буквите на думата ПЕРПЕРИКОН?

м) В състезание участват 10 отбора. По колко начина могат да се разпределят златните, сребърните и бронзовите медали?

н) Колко различни петцифрени числа могат да се образуват чрез разместване на цифрите от 0,1,2,3,4?

о) По колко различни начина могат да се настанят осем студента в три стаи съответно с едно, три и четири легла?

п) По колко различни начина четирима младежи могат да поканят на танц четири от n девойки?

р) Шест различни предмета се боядисват по следния начин: два зелен, два червен, два син цвят. По колко различни начина могат да се боядисат предметите?

с) По колко различни начина могат да се разпределят 10 специалисти в 4 цеха така, че в тях да попаднат съответно по 1,2,3 и 4 души?

т) Нека A е множество с n елемента. Колко биекции има от вида $f : A \to A$?

у) Иванчо и n негови приятели отиват на кино. По колко различни начина могат всички да седнат заедно на един ред, така че Иванчо е винаги между двама негови приятели. Отг. $(n+1)! - n! - n!$

ф) В партида от N изделия, M са бракувани. По колко различни начина могат да се вземат от партидата n изделия, така че точно k от тях да бъдат бракувани ($M \leq N, k \leq n \leq N$)? Отг. $\binom{m}{k}\binom{N-M}{n-k}$

х) От колода с 52 карти се изваждат 6 произволни карти без връщане. По колко различни начина могат да се извадят картите, така че две от тях да са дами? Отг. $\binom{4}{2}\binom{48}{4}$

ц) От колода с 52 карти се изваждат 6 произволни карти без връщане. По колко различни начина могат да се извадят картите, така че две от тях да са тройки и две осмици?

ч) По колко различни начина може да се раздели колода от 52 карти на две пачки от по 26 карти така, че във всяка от тях да има по две дами?

ш) По колко начина може да се разпределят 8 подаръка между 4 лица, така че всеки да получи по два подаръка?

щ) Провежда се събрание с 40 присъстващи. По колко начина може да се избере председател, секретар и 5 членна комисия?

Задача 52. От колода с 52 карти се избират 11. По колко различни начина могат да се изберат извадки, в които се срещат:

а) точно 1 ас; Отг. $\binom{48}{10}\binom{4}{1}$

б) поне 2 валета;

в) точно 4 пики;

г) най-много 2 кари;

д) точно 2 аса и 2 точно трефи;

е) точно 2 аса и не повече от 2 трефи;

Задача 53. Да се намерят всички k-буквени думи от азбука с n букви, $k \leq n$, които:

а) нито една буква не се повтаря;

б) са симетрични; Отг. $n^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$

в) имат две последователни еднакви букви; Отг. $n^{k-1}(k-1)$

г) нямат две последователни еднакви букви;

д) съществува единствена буква, която се повтаря;

е) съществува буква, която се повтаря;

Принцип за включването и изключването

Твърдение 6. За две крайни множества A и B,

а) $A \cap B = \emptyset \;\to\; |A \cup B| = |A| + |B|$.

б) $A \subseteq B \;\to\; |B \setminus A| = |B| - |A|$.

в) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Док.

а) Индукция по броя на елементите на B.

- $|B| = 0$, то $B = \emptyset$ и тогава за произволно множество ,
$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$
- $|B| = 1$, то $B = \{b\}$ и тогава за произволно крайно множество A, за което $b \notin A$, е очевидно, че
$$|A \cup \{b\}| = |A| + 1.$$
- $|B| = n+1$, то $B = B' \cup \{b\}$, $|B'| = n$ и нека A е произволно крайно множество, за което $A \cap B = \emptyset$.
$$|A \cup B| = |(A \cup B') \cup \{b\}| = |A \cup B'| + 1 = |A| + |B'| + 1 = |A| + |B|.$$

б) Ако $A \subseteq B$, то $B \setminus A \;\cup\; A = B$ и $B \setminus A \;\cap\; A = \emptyset$. Тогава
$$|B| = |B \setminus A \;\cup\; A| = |B \setminus A| + |A|.$$
Тогава
$$|B \setminus A| = |B| - |A|.$$

в) Имаме, че:
$$\begin{aligned} A \cup B &= A \setminus B \;\cup\; (A \cap B) \;\cup\; B \setminus A \\ &= A \setminus (A \cap B) \;\cup\; (A \cap B) \;\cup\; B \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$
Трите множества в дясната страна на равенството са непресичащи се. Тогава
$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)| \\ &= |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| + |A \cap B| \end{aligned}$$

□

Твърдение 7. Докажете, че за всеки три крайни множества A, B и C,
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Док.

$$\begin{aligned}|(A\cup B)\cup C| &= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C|\\ &= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - |(A\cap C)\cup (B\cap C)|\\ &= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap (B\cap C)|)\\ &= |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|\end{aligned}$$

□

Теорема 4. Нека $A_1 \dots A_n$ са n на брой крайни множества и $n \geq 2$. Тогава

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| = \sum_{1\leq i\leq n} |A_i| - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cdots\cap A_n|.$$

Задача 54. Колко решения в естествените числа имат уравненията:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$; Отг. $\binom{13}{2}$

б) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_2 < 3$;

в) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_2 \geq 3$;

г) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$;

д) $x_1 + x_2 + x_3 = 11, x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \leq 8$;

Док.

г) Нека A_1 да бъдат решенията на уравнението, за които $x_1 < 2$, A_2 да бъдат решенията на уравнението, за които $x_2 < 3$. Лесно се вижда, че

$$\begin{aligned}|A_1| &= \binom{12}{1} + \binom{11}{1} = 12 + 11 = 23\\ |A_2| &= \binom{12}{1} + \binom{11}{1} + \binom{10}{1} = 12 + 11 + 10 = 33\\ |A_1\cap A_2| &= 6\\ |A_1\cup A_2| &= 23 + 33 - 6 = 50.\end{aligned}$$

Следователно, отговорът е

$$\binom{13}{2} - |A_1\cup A_2| = 78 - 50.$$

д) Нека A_3 да бъдат решенията на уравнението, за които $x_3 > 8$.

$$\begin{aligned}|A_3| &= \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} = 3 + 2 + 1 = 6\\ |A_1\cap A_3| &= 6\\ |A_1\cap A_3| &= 5\\ |A_2\cap A_3| &= 6\\ |A_1\cap A_2\cap A_3| &= 5\end{aligned}$$

Следователно, броят на решенията на уравнението са:

$$|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)$$

$\square$

Задача 55. Нека U е множество от $n (n \geq 3)$ елемента. За всяко множество $X \subseteq U$, с $\overline{X}$ означаваме $U \setminus X$. Намерете броя на:

а) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$; Отг. 4^n

б) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X| = 1$; Отг. $2\binom{n}{1}2^{n-1}$

в) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X| = 2$; Отг. $2^2\binom{n}{2}2^{n-2}$

г) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X| \geq 1$;

д) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X| = k$ и $k < n$;

е) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X| \leq 1$;

ж) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X| = 1$ и $|Y| = 1$; Отг. $\binom{n}{1}\binom{n}{1} = n^2$

з) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $X \cap Y = \emptyset$; Отг. 3^n

и) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X \cap Y| = 1$; Отг. $\binom{n}{1}3^{n-1}$

к) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X \cap Y| = k$ и $k < n$;

л) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$;

м) двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$, за които $X \cap Y = \emptyset$ и $|X| \geq 1$, $|Y| \geq 1$;

н) двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$, за които $X \cap Y = \emptyset$ и $|X| \geq 2, |Y| \geq 2$;

о) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X \setminus Y| = 1$;

п) двойките (X, Y) за $X, Y \subseteq U$, за които $|X \setminus Y| = k$ и $k < n$;

р) двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$, за които $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$ и $|X| \geq 2, |Y| \geq 2$;

с) двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$, за които $X \cap Y = \emptyset$, $|X| \geq 2$ и $|Y| \geq 3$;

т) двойките $(X, Y), X, Y \subseteq U$, за които $|(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)| = 1$, $X \cap Y = \emptyset$, $|X| \geq 2$ и $|Y| \geq 3$;

у) тройките (X, Y, Z) за $X, Y, Z \subseteq U$; Отг. 8^n

ф) тройките (X, Y, Z) за $X, Y, Z \subseteq U$, за които $X \cap Y = \emptyset$; Отг. 6^n

х) тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, за които $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$;

ц) тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, за които $Y \cup X = Z \cup \overline{Y}$;

ч) тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, за които $X \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ и $|Z| = 0$.

ш) тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, за които $X \cup Y \overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ и $|X| \geq 1, |Y| \geq 1, |Z| = 1$.

щ) тройките $(X, Y, Z), X, Y, Z \subseteq U$, за които $X \cup Y \overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ и $|X| \geq 1, |Y| \geq 1, |Z| \leq 1$.

Задача 56. а) По колко начина могат да се изберат n монети да се изберат от купчина монети с номинал 5, 10, 20 и 50 стотинки?

б) Намерете броя на възможните начини за разпределение на n **неразличими** топки в m различни кутии.

в) Намерете броя на възможните начини за разпределение на n **неразличими** топки в m различни кутии, ако няма празна кутия.

г) Намерете броя на възможните начини за разпределение на n **неразличими** топки в m различни кутии, ако съществува поне една празна кутия.

д) Да се намери броя на възможните начини за разпределения на n **неразличими** топки в m **неразличими** кутии.

Задача 57. Множеството от всички двоични вектори от $\{0,1\}^n$, които във фиксирани $n-k$ позиции имат равни значения, ги наричаме k-равнини, за $k \leq n$.

а) Колко различни вектора има в една k-равнина?

б) Колко различни k-равнини има в $\{0,1\}^n$?

в) Колко различни k-равнини съдържат даден фиксиран n-мерен вектор?

Задача 58. Да фиксираме естествените числа m и n. Една функция

$$f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$$

е монотонно ненамаляваща, ако

$$(\forall i \forall j)[1 \leq i < j \leq n \to f(i) \leq f(j)].$$

а) Колко такива функции съществуват?

б) Колко от тези функции са сюрективни при $n \geq m$?

в) Колко от тези функции са инективни при $n \leq m$?

Задача 59. Нека $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$ е пермутация на числата от 1 до 12, за които е изпълнено условието:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}.$$

Намерете броя на тези пермутации.