Упражнение по Дискретни Структури, КН, II поток, зимен семестър 2013-2014 г.

Комбинаторика

Задача 1. *По колко начина можем да хвърлим пет зара, ако заровете са различими (примерно, бял, червен, син, зелен и жълт)? Става дума за стандартни зарове-кубчета.*

Задача 2. *По колко начина можем да хвърлим пет зара, ако заровете са не различими (примерно, всичките бели)? Става дума за стандартни зарове-кубчета.*

Решение: Това са комбинаторни конфигурации с дължина 5 над опорното множество $A = \{⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅\}$, с повторение и без наредба. Броят им е $\binom{5+6-1}{5} = 252$.

Задача 3. *По колко различни начина можем да сложим шестте символа*

⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅

върху шестте стени на зар? Под "различни начина" разбираме следното. Да си представим, че два зара са сложени на масата пред -нас, успоредно един до друг. Всеки от тях има предна, задна, горна, долна, лява и дясна стена. Шестте символа да са сложени по един и същи начин означава

- *или двата зара да имат един и същи символ върху предната стена и върху задната стена и върху горната стена и т.н.*
- *или единият зар да може да бъде завъртян така, че двата зара да имат един и същи символ върху предната стена и върху задната стена и върху горната стена и т.н.*

Задача 4. *По колко начина n човека могат да се хванат за ръце в кръг (на хоро)?*

Упътване Става дума за пермутации, различни спрямо ротация.

Задача 5. *По колко начина можем да нанижем n различни мъниста на огърлица?*

Упътване Става дума за пермутации, различни спрямо ротация и рефлексия, защото огърлицата—за разлика от хорото, което може да бъде завъртяно само около центъра си—може да бъде завъртяна около ос, минаваща през две диаметрално противоположни мъниста.

Задача 6. *По колко начина можем да подредим в редица 5 бели, 7 сини и 9 жълти топки? Топките от всеки цвят са неразличими.*

Задача 7. *Треньорът на националния отбор по футбол иска да подбере играчи за националния отбор само измежду отборите на Левски и ЦСКА. По колко начина може да да направи това, ако:*

1. *няма ограничения*
2. *трябва да подбере поне четири футболисти от Левски?*

Упътване Един футболен отбор се състои от 11 играча.

Пояснение В следващите задачи става дума за играта на карти бридж. За целите на задачите, всичко което е необходимо да се знае за бриджа, е следното. Бридж се играе с различни 52 карти, като всяка карта има два атрибута. Единственото, което различава една карта от друга, са атрибутите. Единият от тези атрибути се нарича **цвят**, а другият, **вид**. Има 4 цвята:

$$\clubsuit\ \diamondsuit\ \heartsuit\ \spadesuit$$

и 13 вида:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K A

Последните четири вида се наричат съответно вале, дама, рига (поп) и асо. От всеки цвят има карти от всичките 13 вида. Иначе казано, можем да мислим за картите като за декартовото произведение на множествата от цветовете и видовете. **Ръка** се нарича произволна подборка от 13 карти, като подредбата на картите в ръката няма значение. **Разпределение на цветовете** в дадена ръка наричаме редица от цели неотрицателни числа c_1, c_2, c_3, c_4, такава че:

- $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4$,
- $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 13$,
- за някой цвят, броят на картите от него в ръката е c_1, за друг цвят е c_2, за трети е c_3, а за четвъртия цвят е c_4.

Задача 8. *Колко ръце има в бриджа, ако:*

1. *няма наложени ограничения*
2. *има поне една дама*
3. *има точно една дама*
4. *има поне две аса*
5. *има точно три аса*

Задача 9. *Покажете грешката в следния "отговор" на Задача 17, (4).*

Съществуват точно $\binom{4}{2} = 6$ начина да подберем две аса от четирите

$$\clubsuit A \qquad \diamondsuit A \qquad \heartsuit A \qquad \spadesuit A$$

След като веднъж изберем двете аса, останалите $13 - 2 = 11$ карти в ръката се избират произволно измежду $52 - 2 = 50$ карти; това можем да направим по $\binom{50}{11}$ начина. Съгласно принципа на умножението, отговорът е

$$\binom{4}{2} \times \binom{50}{11} = 224\,122\,432\,800$$

Задача 10. *Колко са възможните ръце в бриджа с разпределение на цветовете* $5, 4, 4, 0$?

Решение: За фиксирано разпределение на цветовете от даден вид—примерно, пет $\heartsuit$, четири $\spadesuit$, четири $\clubsuit$, нула $\diamondsuit$—броят на възможните ръце е:

$$\binom{13}{5} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{0} = 657\,946\,575$$

Това е така, понеже по $\binom{13}{k}$ начина можем да подберем k карти от 13-те карти от даден цвят. Отговорът е произведението от $657\,946\,575$ и броят начини, по които можем да изберем от кой цвят да има 5 карти, от кой 4 и т.н. Този брой е

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$$

тъй като по $\binom{4}{1}$ начина може да изберем от кой цвят да има 5 карти и по $\binom{3}{1}$ начина, от оставащите 3 цвята, от кой да има 0 карти; след като сме избрали от кой цвят да има 5 и от кой, 0 карти, за цветовете с по 4 карти изборът е само един. Друг начин да се изведе това „12“ е чрез формулата за мултиномния коефициент:

$$\frac{4!}{1!.2!.1!} = 12$$

И така, отговорът е

$$657\,946\,575 \times 12 = 7\,895\,358\,900 \qquad \square$$