Лекция 4: Функции

Минко Марков
minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

3 януари 2025 г.

Основни определения

Определение 1 (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$.

Определение 2 (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$.

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\begin{aligned}\forall x \in X \Big((\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \\ ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \\ (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \to w = z)) \Big)\end{aligned}$$

Или по-просто

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \ \forall w, z \in Y \Big((x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \to w = z \Big)$$

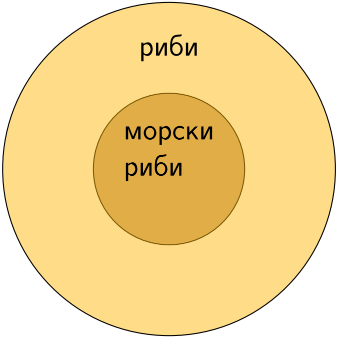
Определение (Тотална функция)

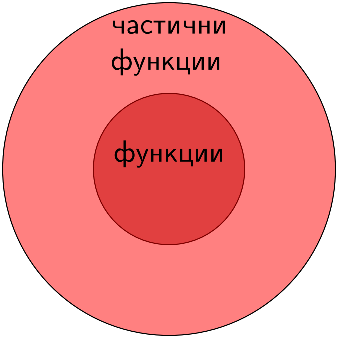
Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X\Big((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \\ (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \to w = z)\Big)$$

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само “функция” е “тотална функция”. При дадени X и Y, очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само “функция” е частен случай на “частична функция”: всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.
Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.

Частични функции и функции (2)





За формалните определения

На практика често казваме "изображение" (mapping) вместо "функция". Това обаче не е определение: а какво е "изображение"?

Предпочитаме да не въвеждаме "функция" като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме "функция" чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

Типични записи на функции

Наместо $f \subseteq X \times Y$, пишем $f : X \to Y$. Чете се "f е функция с домейн X и кодомейн Y". Още може да се чете и като "f изобразява X в Y".

Наместо $(x, y) \in f$ или инфиксния запис $x\,f\,y$, в контекста на функциите ползваме добре известния запис $f(x) = y$. "x" е *променлива*. Променлива е нещо като кутийка, в която можем да слагаме неща (от домейна).

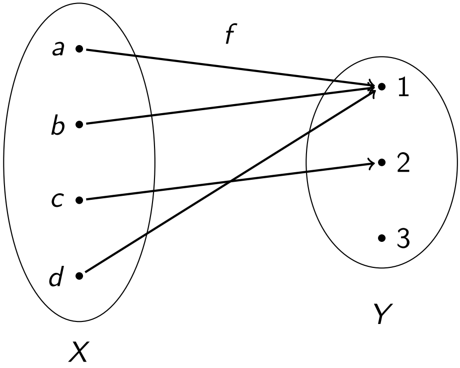
Свикнали сме да мислим за функциите на много променливи като за обобщение на функциите на една променлива. Но всяка функция на k променливи в някакъв смисъл е функция на **една** променлива, която обаче е наредена k-орка.

Пример: някаква реална функция на две променливи. Типичен запис е $g(x, y) = z$, където x, y и z са реални. Тогава $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Можем да мислим за g като функция на една променлива, която не е реално число, а наредена двойка от реални числа. Формално правилният запис би бил $g((x, y)) = z$, където $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но това не се ползва.

Забележка: множеството от реалните числа се бележи с $\mathbb{R}$.

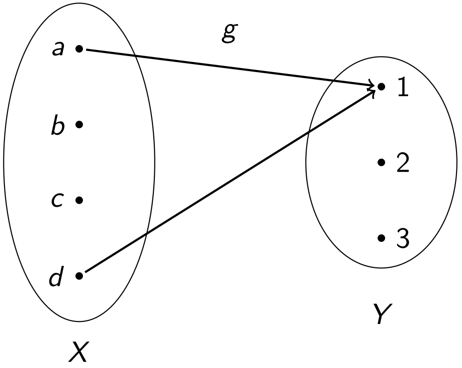
Представяне на функция с диаграма

Нека $f : X \to Y$, като X и Y са крайни. Да кажем, $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X, излиза точно една стрелка.



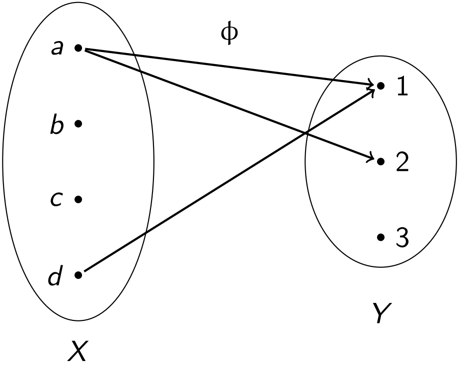
Представяне на частична функция с диаграма

Нека g е частична функция с домейн X и кодомейн Y. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X, излиза не повече от една стрелка.

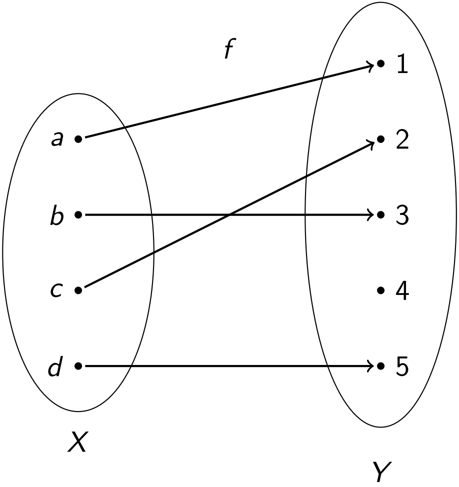


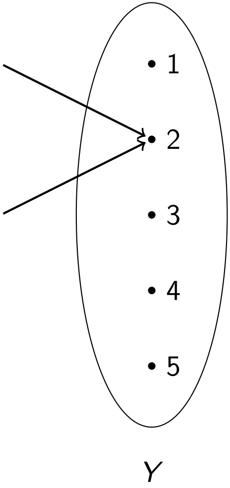
Диаграма на релация, която не е частична функция

Ако от поне една точка в елипсата, отговаряща на X, излиза повече от една стрелка, това не може да е диаграма на частична функция (оттам, и на тотална). Това е диаграма на релация ϕ с първи домейн X и втори домейн Y.

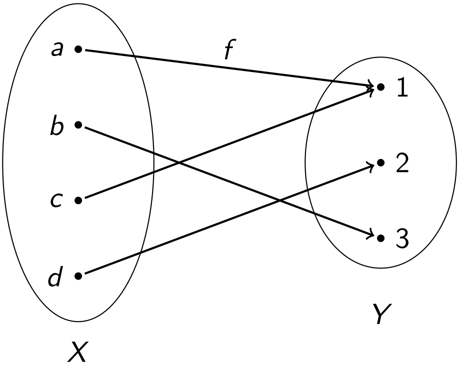


Нека $f : X \to Y$. f е *инекция*, ако
$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.

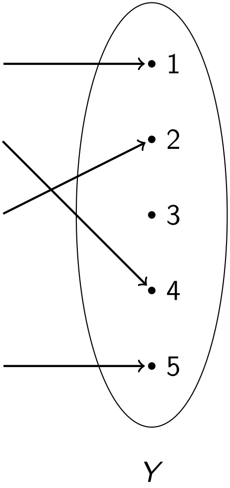



1
2
3
4
5
Y

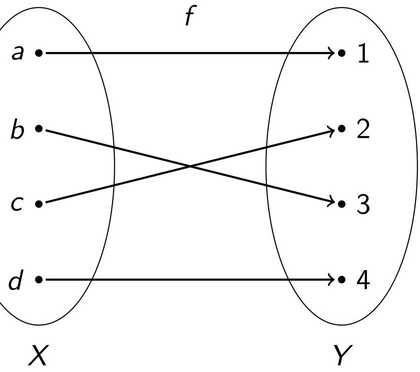
Нека $f : X \to Y$. f е *сюрекция*, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
Неформално: кодомейнът да бъде “покрит” от изображението.



Контрапример за сюрекция



Нека $f : X \to Y$. f е *биекция*, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.



Инекции, сюрекции, биекции – пример

Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако няма правостоящи, сядането е функция.

Ако на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове, сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Все още не сме въвели формално "крайно множество" и "брой на елементи на крайно множество", но интуитивно всеки разбира за какво става дума.

Нека $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Нека $f : X \to Y$.

Необходимо условие f да е инекция е $m \leqslant n$. Необходимо условие f да е сюрекция е $m \geqslant n$. Необходимо условие f да е биекция е $m = n$.

Иначе казано, при $m > n$ няма инекция, при $m < n$ няма сюрекция, при $m \neq n$ няма биекция.

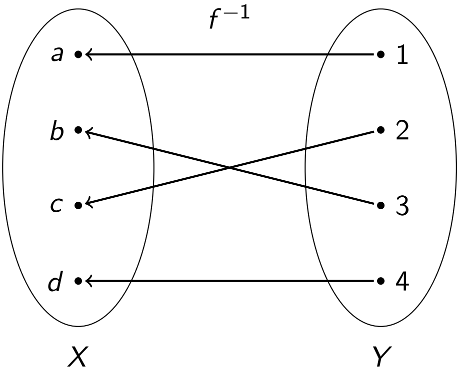
Обратна функция на биекция

Нека $f : X \to Y$ е биекция. *Обратната функция на* f се бележи с f^{-1}. Тя е с домейн Y и кодомейн X и се дефинира така:

$$\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x, \text{ където } x \text{ е уникалният елемент на } X, \\ \text{такъв че } f(x) = y$$

Обратна функция на биекция – пример

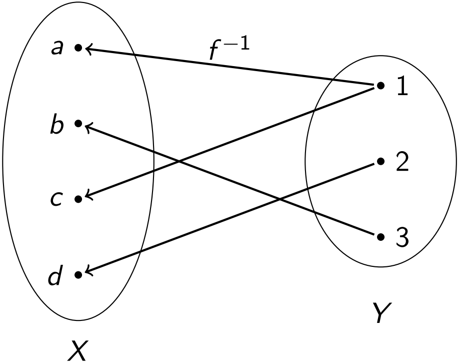
Нека f е биекцията от слайд 17. Нейната обратна функция е следната:



Обратна функция на функция

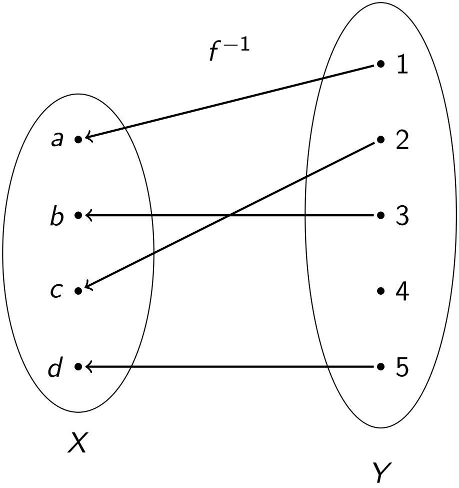
Образно казано, обратната функция има диаграма с разменени домейн и кодомейн и обърнати посоки на стрелките.

Ако опитаме да "обърнем" функция, която не е инекция, ще получим обект, който дори **не е функция**. Ето какво ще получим, ако се опитаме да "обърнем" сюрекцията от слайд 15:



Обратна функция на функция (2)

Ако обърнем произволна инекция, ще получим частична функция, която не е непременно функция. Ето какво ще получим, ако се опитаме да "обърнем" инекцията от слайд 13:



Рестрикция на функция

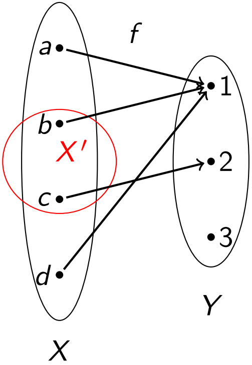
Нека $f : X \to Y$ и $X' \subseteq X$. *Рестрикцията на* f *върху* X' е $f' : X' \to Y$, където $\forall x \in X' : f'(x) = f(x)$. Бележим рестрикцията така: $f|_{X'}$.

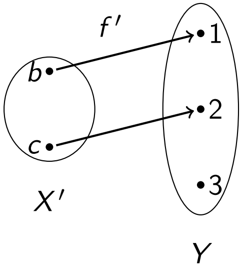
Алтернативна дефиниция е: $f|_{X'} = \{(x, y) \in f \mid x \in X'\}$.

Понятието "рестрикция" може да се обобщи и за частични функции по естествения начин.

Очевидно, всяка частична функция има рестрикция, която е функция – вземаме такова X', че всеки елемент от X' да има изображение. Това е в сила дори ако $f = \emptyset$; забележете, че $f|_{\emptyset}$ е винаги функция, независимо от това дали $f = \emptyset$ или $f \neq \emptyset$.

Нека $f : X \to Y$ е следната функция (това е функцията от слайд 10). Ако $X' = \{b, c\}$, то рестрикцията $f' = f|_{X'}$ е тази:



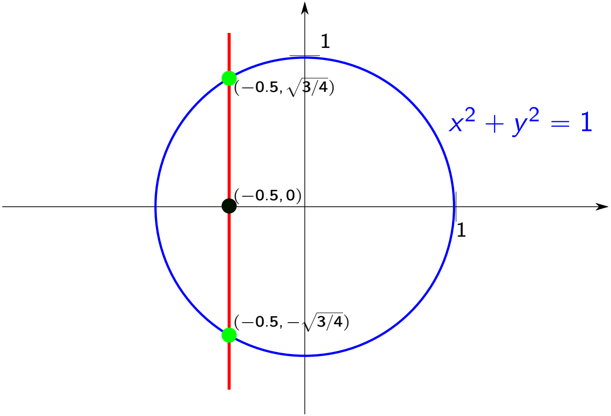


Реална функция е всяка функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Нека е дадено уравнение на две реални променливи x и y. Дали то реализира частична функция $f(x) = y$? Да, ако и само ако издържа теста с вертикалната права. Мислено "влачим" вертикална права върху графиката:

- ако поне на едно място вертикалната права пресича графиката в повече от една точка, f не е дори частична функция,
- ако вертикалната права винаги пресича графиката в точно една точка, f е функция,
- ако вертикалната права винаги пресича графиката в не повече от една точка, f е частична функция.

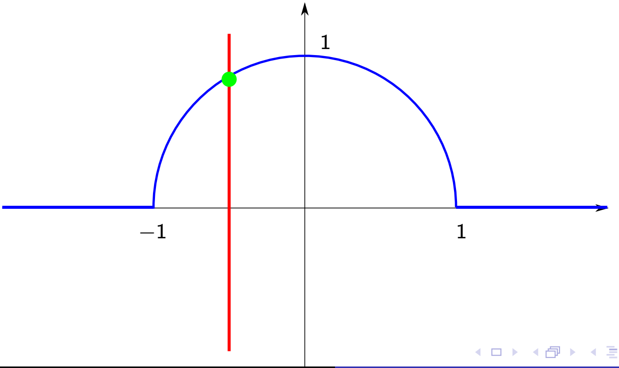
Примерно, $x^2 + y^2 = 1$ не задава функция и съответно не издържа теста с вертикалната права. Дори не е частична функция!



От друга страна,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < -1 \text{ или } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{ако } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

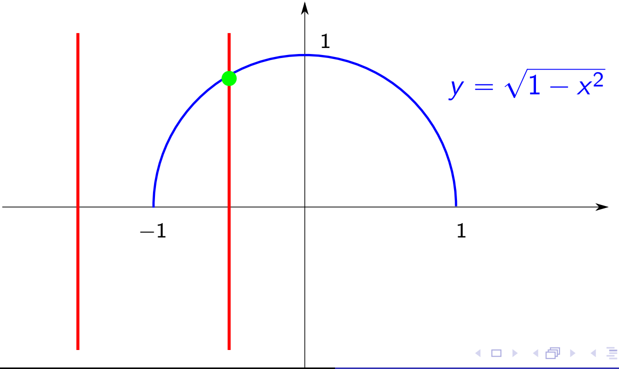
е функция (което означава, че е и частична функция).



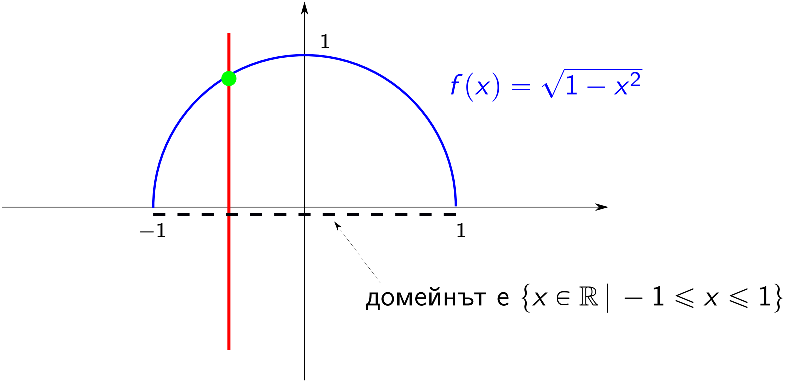
От трета страна,

$$f(x) = \begin{cases} \text{недефинирана}, & \text{ако } x < -1 \text{ или } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{ако } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

е частична функция, но не е функция.



От четвърта страна, ако $f : \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, то f е функция, но не е реална функция по нашата дефиниция, понеже домейнът не е множеството от всички реални числа.

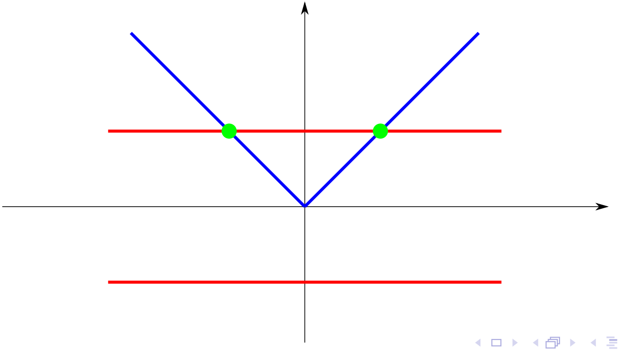


Нека е дадена функция f със своята графика. Мислено “влачим” хоризонтална права върху графиката. f е инекция тстк правата не пресича никъде повече от една точка от графиката. f е сюрекция тстк правата навсякъде пресича поне една точка от графиката. Тогава f е биекция тстк правата навсякъде пресича точно една точка от графиката.

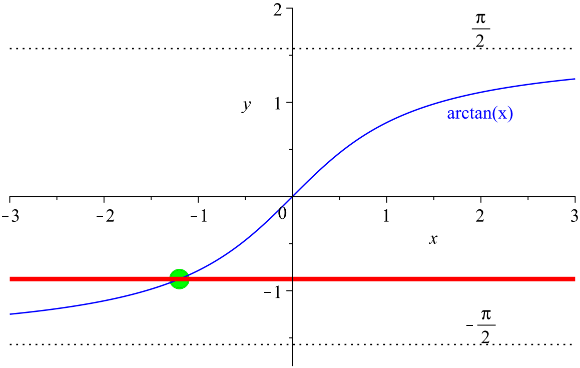
Нека f е реална функция, такава че

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

f не е нито е инекция, нито сюрекция.



Реалната функция $\arctan(x)$ "издържа" теста с хоризонталната права, така че е инекция, но не е сюрекция.

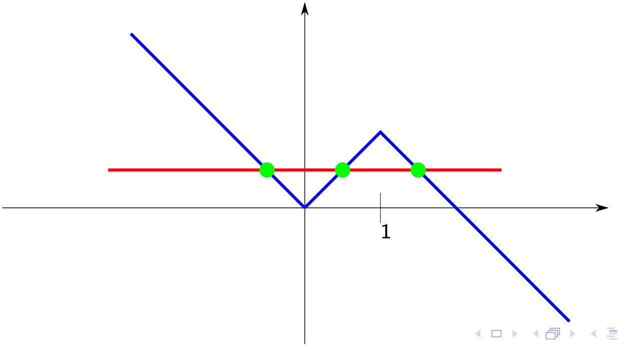


Графиката е генерирана с Maple(tm).

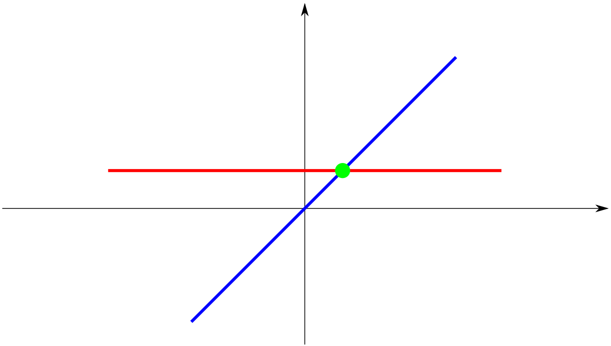
Нека f е следната реална функция.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ x, & \text{ако } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x, & \text{ако } x > 1 \end{cases}$$

f е сюрекция, но не е инекция.



Реалната функция $f(x) = x$ е инекция и сюрекция; тоест, биекция.



Дефиницията “множество е крайно, ако има краен брой елементи” **не върши работа**. На практика тя казва “множество е крайно, ако е крайно”. Очевидно това е порочно зациклена дефиниция!

Дефинирането на "крайно множество" става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 3 (крайно множество, кардиналност)

Множество A е крайно, ако

- *или $A = \varnothing$, в който случай кардиналността на A е 0,*
- *или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$; тогава кардиналността на A е n.*

Кардиналността на A е броят на елементите и се бележи с $|A|$. "Мощност на множество" е синоним на "кардиналност на множество". Множества са *равномощни*, или *съизброими*, тстк между тях съществува биекция. На английски се ползва "equinumerous".

Определение 4 (безкрайно множество)

Множество е безкрайно, ако не е крайно.

Очевидно $\mathbb{N}$ не е крайно: колкото и голямо естествено число n да вземем, $n + 1$ е по-голямо. Така че за всяко n е вярно, че $n + 1 \notin \{0, 1, \ldots, n\}$.

Изброими множества

Определение 5 (изброимо безкрайно множество)

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.

Определение 6 (изброимо множество)

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно.

Определение 7 (неизброимо множество)

Множество е неизброимо, ако не е изброимо.

Очевидно всяко неизброимо множество е безкрайно. Не е очевидно, че съществуват неизброими множества.

Естествените числа се генерират от процес, който започва от 0 с добавяне на единица:

$$
\begin{aligned}
0 + 1 &= 1 \\
1 + 1 &= 2 \\
&\dots \\
1\,000\,000 + 1 &= 1\,000\,001 \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Аристотел характеризира този процес като "потенциална безкрайност". Кулминацията на процеса, а именно множеството от всички естествени числа, е "пълна безкрайност", или "актуална безкрайност".

За безкрайните множества (2)

Потенциална и актуална безкрайност

От Аристотелово време чак до 19 век мнозинството от мислителите отхвърлят актуалната безкрайност като нелегитимно понятие. Гаус (Carl Friedrich Gauss), най-великият математик на своето време, пише:

> But concerning your proof, I protest above all against the use of an infinite quantity as a *completed* one, which in mathematics is never allowed. The infinite is only *façon de parler*, in which one properly speaks of limits.

Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite,
Dauben, pp. 120

Редът на Лайбниц е

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Ако гледаме на сумата вдясно като на процес, който апроксимира $\frac{\pi}{4}$ все по-добре с добавяне на все повече събираеми, имаме предвид потенциална безкрайност. Тогава $\frac{\pi}{4}$ е само граница, по израза на Гаус, към която клони сумата, без да я достига никога. Тук и дума не става за пълна безкрайност: на всеки етап от сумирането сме събрали краен брой събираеми.

Ако гледаме на сумата вдясно като на едно цяло нещо, което е точно равно на $\frac{\pi}{4}$, имаме предвид актуална безкрайност.

За безкрайните множества (4)

Проблем при безкрайните множества: цялото е “равно” на своя част. “Равно” има смисъл на “равномощно”.

Примерно, множеството на естествените числа и множеството на четните числа $\mathbb{N}_e = \{0, 2, \ldots\}$ са равномощни. Интуитивно, естествените са повече, защото има естествени нечетни числа. От друга страна, биекцията $f : \mathbb{N} \to \{0, 2, \ldots\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = 2n$$

съчетава точно естествените и четните числа.

Оттук и мнението, че да се говори за “броя на всички числа” е безсмислица.

Георг Кантор (Georg Cantor) е първият математик, който разглежда сериозно безкрайните множества и създава кохерентна и задълбочена теория за тях. Той въвежда понятия, имащи смисъл на бройки на елементите на безкрайни множества, и работи с тези понятия.

Кантор показва, че множества като $\mathbb{Q}$ (рационалните числа) или множеството на алгебричните ирационални числа (като $\sqrt{2}$), които в днешната терминология са строги надмножества на $\mathbb{N}$, са равномощни с $\mathbb{N}$. След това показва, че $\mathbb{R}$ не е равномощно на $\mathbb{N}$.

Основен резултат на Кантор е, че има различни видове безкрайност. И естествените, и реалните числа са безброй много, но реалните са повече в смисъл, че няма биекция между тях и естествените.

$\mathbb{N}^+$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}^+ : f(n) = n - 1$.

$\mathbb{N}_e = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е четно}\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}_e \to \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}_e : f(n) = \frac{n}{2}$.

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е точна степен на } 2\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : M \to \mathbb{N}$, където $\forall n \in M : f(n) = \log_2 n$.

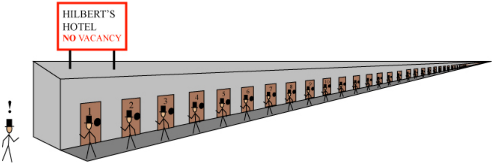
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \text{ където } \forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 2n - 1, & \text{ако } n > 0, \\ -2n, & \text{ако } n < 0. \end{cases}$$

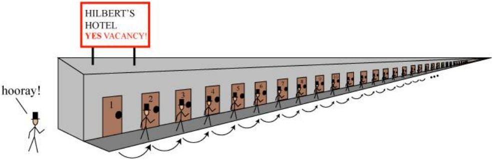
Изброяването е $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(-3) = 6$ и т. н. Ето наредбата:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$$

Хотел с безкрайно много стаи, номерирани с 1, 2, 3 и така нататък. Във всяка стая има гост.



Може ли хотелът да приюти нов гост? Колкото и да е контраинтуитивно, да: преместваме всеки от вече настанените в следващата стая.



Графиките са взети от Интернет от сайт без лицензи.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо

Теорема 1

Съществува биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Доказателство: Твърди се, че има начин да бъдат изброени наредените двойки от естествени числа.

Разбиваме множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{N}\}$ на подмножества S_0, S_1, S_2, ... по следния начин

$$\forall k \in \mathbb{N} : S_k = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, a + b = k\}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (2)

Изброяването е следното: при $i < j$, наредените двойки от S_i преди наредените двойки от S_j, а вътре във всяко S_i нареждаме двойките по нарастващ втори елемент:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ \underbrace{(0,0)}_{S_0} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{(1,0) \quad (0,1)}_{S_1}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{(2,0) \quad (1,1) \quad (0,2)}_{S_2}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{(3,0) \quad (2,1) \quad (1,2) \quad (0,3)}_{S_3}} & \cdots \end{array}$$

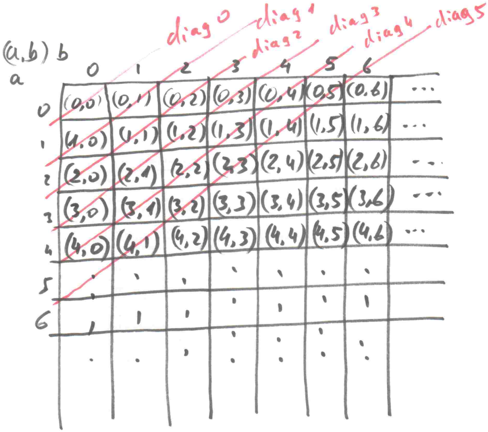
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (3)

Да си представим наредените двойки (a, b) от естествени числа в безкрайна таблица.

(a,b) b a	0	1	2	3	4	5	6	
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	...
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	...
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	...
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	...
4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	...
5	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
6	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (4)

Да групираме наредените двойки по диагонали. Тогава $diag_i$ съдържа точно елементите на S_i.



Ето визуализация на изброяването

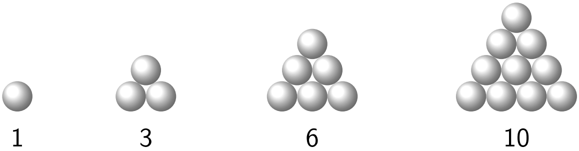
Да разгледаме следната функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f((a,b)) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a,b) = (0,0) \\ \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Това е **формалното** описание на функцията на изброяването, която въведохме на слайд 49 и илюстрирахме на слайд 52.

Ще докажем, че f е биекция.

Числата от вида $\frac{k(k+1)}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$ се наричат *триъгълните числа*. В нарастващ ред на k, редицата от триъгълните числа започва така: $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$. Следната визуализация за $k > 0$ показва защо се наричат триъгълните числа .



Лесно се вижда, че триъгълните числа са точно сумите $\sum_{i=0}^{k} i$, за $k \in \mathbb{N}$.

В израза $\boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b}$, събираемото $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е точно броят на наредените двойки **във всички диагонали преди диагонал номер $\boldsymbol{a+b}$.** То е триъгълното число

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (a+b)$$

Събираемото b е броят на елементите **преди** (a, b) в диагонал номер $a + b$.

Да допуснем, че f не е инекция. Тогава съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2), такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Нека $a_1 + b_1 = m_1$ и $a_2 + b_2 = m_2$.

Случай 1: $m_1 \neq m_2$. БОО, нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа, като $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Ще докажем, че $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Наистина,

$$
\begin{aligned}
&\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2} \leftrightarrow \\
&b_1 < \frac{1}{2}\left(m_2^2 + m_2 - m_1^2 - m_1\right) \leftrightarrow \\
&b_1 < \frac{1}{2}\left((m_2 - m_1)(m_2 + m_1) + (m_2 - m_1)\right) \leftrightarrow \\
&b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)
\end{aligned}
$$

Но $m_2 - m_1 \geqslant 1$, понеже $m_2 > m_1$ по допускане. Да разгледаме множителя $m_2 + m_1 + 1$. Но това е $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1$. Очевидно $a_2 + b_2 > b_1$ в текущите допускания, а също така $b_1 + 1 > b_1$. Тогава $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1 > 2b_1$. Тогава

$$\frac{1}{2}(\underbrace{m_2 - m_1}_{\geqslant 1})(\underbrace{m_2 + m_1 + 1}_{> 2b_1}) > b_1.$$

Доказахме, че $b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 = f(a_1, b_1)$, а $\frac{m_2(m_2+1)}{2} \leqslant f(a_2, b_2)$. Показахме, че $f(a_1, b_1) < f(a_2, b_2)$.

Заключаваме, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$, е погрешно в Случай 1. ↯

Случай 2: $m_1 = m_2$. Тогава трябва b_1 да е различно от b_2, иначе $a_1 = a_2$, което влече $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Щом $b_1 \neq b_2$ и $m_1 = m_2$, то $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$. С други думи, $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$. Заключаваме, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$, е погрешно в **Случай 2**. $\lightning$

Тъй като **Случай 1** и **Случай 2** са изчерпателни, заключаваме, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$ за някои естествени a_1, b_1, a_2 и b_2, е погрешно. $\lightning$

Заключаваме, че f е инекция.

Щом f е инекция, обратното ѝ изображение е дефинирано и то е частична функция. Очевидно следният алгоритъм реализира въпросното обратно изображение. Това, че всяко естествено число е образ на някоя наредена двойка по отношение на изображението f доказва, че f е сюрекция (обратното изображение е **тотална** функция).

```
if (n == 0) {a = 0; b = 0;}
else {c = 1;
      while (c <= n) {n = n - c; c ++;}
      a = c - 1 - n; b = n;}
return (a, b);
```

Определение

Множеството от рационалните числа е

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$

Забелязваме, че (изброимо безкрайно) множество обикновени дроби $\frac{p}{q}$ съответстват на едно и също число; примерно $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{-2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1\,000\,001}{2\,000\,002}$ и така нататък съответстват на, или представляват, едно и също число. И така, рационалните числа нямат уникално представяне чрез обикновени дроби. Може да въведем релация на еквивалентност (каква?) върху множеството от дробите и да кажем, че нейните класове на еквивалентност са рационалните числа.

Да кажем, че $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Лесно следствие на Теорема 1 е това:

Следствие 1

Съществува биекция $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$.

Забелязваме, че рационалните числа може да се записват като наредени двойки: дали ще напишем "$\frac{p}{q}$" или "(p, q)" не е съществено.
Един начин да бъдат изброени елементите на $\mathbb{Q}^+$ е да вземем таблицата от слайд 52, да изтрием най-лявата колона (за да няма деление на нула) и след това да "вървим" в реда на онова изброяване, като прескачаме наредените двойки, които представляват числа, които вече са били изброени:

$$0, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, \ldots$$

След като се убедихме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо, забелязваме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ също е изброимо. Може да си представим тримерна безкрайна таблица от наредените тройки, да вземаме двумерни "разрези" от нея, състоящи се от тройките с една и съща сума, да наредим "разрезите" по сумите им, а в рамките на един "разрез" лесно може да наредим линейно тройките.

Може да обобщим така.

Теорема 2

За всяко цяло положително k, множеството $\mathbb{N}^k$ е изброимо.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (1)

Теорема 3

Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 1 беше достатъчно да покажем само един начин за изброяване. Сега обаче не е достатъчно да покажем, че един определен начин за изброяване "не работи". Сега се иска да покажем, че **никой** начин за изброяване "не работи". Ще извършим доказателството с допускане на противното. Допускаме, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, тоест, съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (2)

Характеристична редица е безкрайна булева редица $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, която характеризира, или определя, дадено подмножество X на $\mathbb{N}$ по следното правило. За всяко $n \in \mathbb{N}$:

- ако $a_n = 1$, то n се съдържа в X,
- ако $a_n = 0$, то n не се съдържа в X.

Ето няколко примера за характеристични редици и подмножествата на $\mathbb{N}$, които определят:

- $(0, 0, 0, \ldots)$ */*само нули*/* определя празното множество;
- $(1, 1, 1, \ldots)$ */*(само единици)*/* определя самото $\mathbb{N}$;
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ */*(повтаряне на 10)*/* определя четните числа;
- $(0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$ */*(само две единици)*/* определя $\{1, 2\}$.

Нека $\mathcal{A}$ е множеството от характеристичните редици. Съществува очевидна биекция между $\mathcal{A}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

Твърдението "подмножествата на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени" става "елементите на $\mathcal{A}$ могат да бъдат изброени". Това е допускането, което ще опровергаем.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (4)

Допускаме изброяване на характеристичните редици: A_0, A_1, $\ldots$, като всяка характеристична редица се появява точно веднъж. Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \ldots)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots)$, и така нататък. Представяме си ги написани в безкрайна колона:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \ldots) \\
A_1 &= (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots) \\
A_2 &= (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots) \\
A_3 &= (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots) \\
\ldots
\end{aligned}
$$

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (5)

Разглеждаме главния диагонал: редицата $X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots)$.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \ldots) \\
A_1 &= (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots) \\
A_2 &= (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots) \\
A_3 &= (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Образуваме нейната "побитова инверсия", редицата $\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, \overline{a_{3,3}}, \ldots)$.

За всяко i, j, $\overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$, и обратно.

Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и $\overline{X}$ да се среща. Но $\overline{X}$ не може да е A_0, защото се различават в поне една позиция – нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$; ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.

Аналогично, $\overline{X}$ не може да е A_1, защото се различават в първата позиция, $\overline{X}$ не може да е A_2, защото се различават във втората позиция, и така нататък.

Тогава $\overline{X}$ не се среща в колоната; иначе казано, подмножеството B на $\mathbb{N}$, съответстващо на $\overline{X}$, няма образ в хипотетичната биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$. $\lightning$ $\square$

Теорема 4

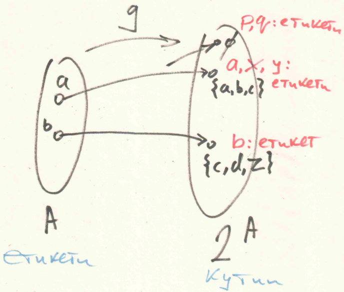
За всяко множество A, не съществува сюрекция $g : A \to 2^A$.

Да допуснем противното. Тогава съществува A, такова че съществува сюрекция $g : A \to 2^A$. Разглеждаме множеството

$$S = \{a \in A \mid a \notin g(a)\} \tag{1}$$

Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция, следователно $\exists x \in A : g(x) = S$. Дали $x \in S$?

- Ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (1).
- Ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (1).



Разглеждаме всички етикети, които са залепени в/у кутии, които не ги съдържат. Те образуват S. S има етикет x. Дали $x \overset{?}{\in} S$

$[0,1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Нека $\mathcal{A}$ е множеството от всички характеристични редици, което вече дефинирахме на слайд 71. Съществува очевидна биекция $f : [0,1] \to \mathcal{A}$; разглеждаме числата от $[0,1]$, записани като двоични дроби в двоична позиционна бройна система, без нулата вляво от двоичната точка, без самата точка, с безкрайно дълъг запис, евентуално попълнен с нули вдясно. Примено, числото една втора по принцип се пише като 0.1 в двоична система, но ние ще го запишем като $10000\ldots$.

Маловажна особеност: някои числа имат по два записа.

- Една втора има два записа по традиционния начин 0.1 и $0.01111\ldots$, които по текущия начин на записване стават съответно $10000\ldots$ и $01111111\ldots$.
- Единицата има два записа по традиционния начин 1.0 и $0.11111\ldots$, които по текущия начин стават съответно $0000\ldots$ и $11111\ldots$.

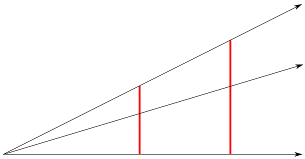
$(0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leqslant 1\}$. Твърдим, че има биекция $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$. Доказателството не може да използва функцията-идентитет $g(x) = x$, защото $(0, 1]$ не съдържа нулата, така че $g(0)$ би било извън $(0, 1]$.

Но може да ползваме идеята на хотела на Hilbert: 0 се изобразява в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ се изобразява в $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ се изобразява в $\frac{7}{8}$, и така нататък. Формално, $\forall n \in [0, 1]$:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, & \text{ако съществува } k \in \mathbb{N}, \text{ такова че } n = \frac{2^k-1}{2^k}, \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Аналогично се доказва, че $[0, 1]$ и $(0, 1)$ са равномощни. Вече видяхме, че $[0, 1]$ е неизброимо. Тогава и $(0, 1)$ е неизброимо.

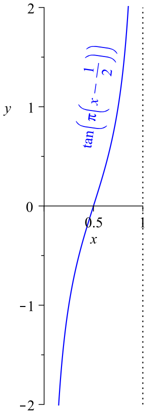
Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $b > a$ и $d > c$. Това, че $[a, b]$ и $[c, d]$ са равномощни, е очевидно. Ако мислим за отсечки с различни дължини:



Всеки от интервалите може да е затворен, отворен или полузатворен, равномощността остава в сила.

Ще докажем нещо доста по-контраинтуитивно: кой да е интервал, да кажем $(0, 1)$, е равномощен с $\mathbb{R}$. Отсечка е равномощна с безкрайна права!

$\tan\left(\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$ е биекция, изобразяваща $(0,1)$ в $\mathbb{R}$.



Графиката е генерирана с Maple(tm).

Реалните числа са (безкрайно) повече от рационалните

Видяхме, че $\mathbb{Q}$ е изброимо, а $\mathbb{R}$ е неизброимо. В някакъв смисъл, реалните числа са повече от рационалните: не просто $\mathbb{Q}$ е строго подмножество на $\mathbb{R}$, но реалните числа са по-високо в йерархията на безкрайностите. Това е доста контраинтуитивно, понеже всеки отворен интервал в $\mathbb{R}$ съдържа безкрайно много рационални числа. Ерго, през колкото и силна "лупа" да разглеждаме реалната ос, няма да видим реален интервал, в който няма рационални числа.

КРАЙ