Пояснение върху понятието "формули над множество булеви функции"

Дадено е изброимо множество от булеви променливи $\mathfrak{X}$. Дадено е изброимо множество от булеви фукции $\mathfrak{F}$, чиито променливи са от $\mathfrak{X}$. Дадена е крайна азбука Z, чиито символи имат смисъл на цифри за някаква бройна система. Дадена е функция $\iota : \mathbb{N} \to Z^+$, която е биекция. Смисълът на ι е, бройната система. Нека

$$Y = \{f, x, (,), \;,\}$$

В червено са символите от Y, а в черно, метасимволите. Нека

$$\Sigma = Y \cup Z$$

Формулите над $\mathfrak{F}$ са точно тези стрингове от Σ^+, които може да бъдат генерирани посредством краен брой прилагания на следните правила:

1. Всеки стринг $x\alpha$ е формула, където $\alpha \in \Sigma^+$. Семантиката е x_j, където $x_j \in \mathfrak{X}$ и $\iota(j) = \alpha$.

2. За всяка функция $f_k \in \mathfrak{F}$, нека n е броят на нейните променливи, нека $\iota(k) = \alpha$, нека x_1, $\ldots$, x_n са нейните променливи и функцията е $f_k(x_1, \ldots, x_n)$, и нека $\iota(j) = \beta_j$ за $1 \leq j \leq n$, така че стрингът от Σ^+, съответстващ на x_j, да бъде $x\beta_j$. Тогава стрингът

   $$f\alpha(x\beta_1,x\beta_2,\ldots,x\beta_n)$$

   е формула над $\mathfrak{F}$ и нейната семантика, тоест нейната съответстваща функция от $\mathfrak{F}$, е $f_k(x_1, \ldots, x_n)$.

3. За $f_k \in \mathfrak{F}$, нека n е броят на нейните променливи, нека $\iota(k) = \alpha$, нека x_1, $\ldots$, x_n са нейните променливи и функцията е $f_k(x_1, \ldots, x_n)$, и нека ϕ_1, $\ldots$, ϕ_n са формули над $\mathfrak{F}$. Тогава

   $$f\alpha(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$$

   е формула над $\mathfrak{N}$. Нейната семантика е функцията

   $$f_k(g_1, \ldots, g_n)$$

   където е g_j е фунцията от $\mathfrak{F}$, съответстваща на ϕ_j, за $1 \leq j \leq n$.

4. Няма други формули над $\mathfrak{F}$.