Теоремата на Оре – достатъчно (без да е необходимо) условие за съществуване на Хамилтонов цикъл в графи

Следната теорема е доказана от норвежкия математик Øysten Ore.

Теорема 1. *Нека* $G = (V, E)$ *е граф, такъв че* $|V| \geq 3$ *и*

$$\forall u, v \in V : (u, v) \notin E \to d(u) + d(v) \geq n \tag{1}$$

Тогава G *е Хамилтонов.*

Доказателство: Да допуснем противното – съществува граф $G = (V, E)$, за който (1) е в сила и в G няма Хамилтонов цикъл. Нека $|V| = n$ и $|E| = m$. Да си представим процедура, която добавя по едно липсващо ребро към G, докато полученият граф стане пълен граф на n върха (когото наричаме K_n). "Добавяне на липсващо ребро" означава добавяне на ребро между двойка върхове, между които няма ребро. Действието на тази процедура можем да си представим нагледно така. Нека началният граф G бъде наречен G_0. Към него добавяме едно ребро и получаваме граф G_1. Към него добавяме едно ребро и получаваме граф G_2. И така нататък, докато не получим K_n, към който не може да добавяме повече ребра и с него процедурата свършва. Броят на добавените ребра е точно $\binom{n}{2} - m$. Нека $s = \binom{n}{2} - m$. Тогава, ако наричаме K_n с името G_s, действието на процедурата се онагледява така:

$$G_0 = G \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} G_1 \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} \quad \ldots \quad \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} G_s = K_n$$

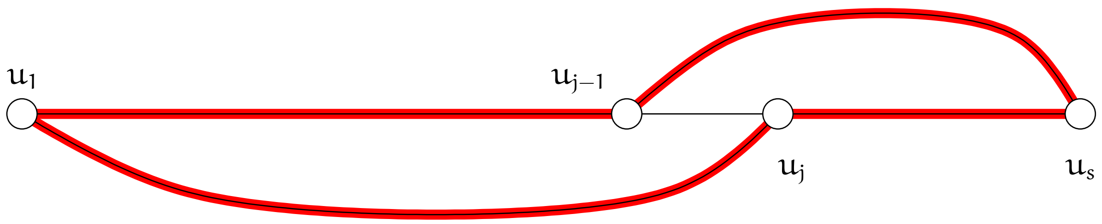
Началният граф G_0 не е Хамилтонов по допускане. Финалният граф $G_s = K_n$ очевидно е Хамилтонов. Тогава съществува i, такова че $0 \leq i \leq s - 1$, такова че G_i не е Хамилтонов и G_{i+1} е Хамилтонов. Това се основава на очевидното наблюдения, че ако граф е Хамилтонов, всеки друг граф, получен чрез добавяне на ребра, също е Хамилтонов. Очевидно "преходът" от не-Хамилтонови графи към Хамилтонови е точно един:

$$\underbrace{G_0 \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} \ \ldots \ \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} G_i}_{\text{не са Хамилтонови}} \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}}$$
$$\underbrace{G_{i+1} \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} \ \ldots \ \xrightarrow{\text{добавяне на ребро}} G_s}_{\text{са Хамилтонови}}$$

В последния граф, който не е Хамилтонов, а именно G_i, очевидно има Хамилтонов път p, иначе няма как от него да стане Хамилтонов граф чрез добавяне на точно едно ребро. Без ограничение на общността, нека върховете в p са именувани $u_1, \ldots, u_n$ така:

$$p = u_1, u_2, \ldots, u_n$$

Ключовото наблюдение е, че за всеки връх u_j в p, който е съсед на u_1, върхът вляво, а именно u_{j-1}, *не е съсед на* u_n. Ако това не е вярно, би имало Хамилтонов цикъл в G_i:



А по конструкция G_i не е Хамилтонов.

Нека $d_{G_i}(u_1) = r$. Тогава $d_{G_i}(u_n) \leq (n-1) - r$, понеже измежду върховете на $V \setminus \{u_n\}$, които са потенциални съседи на u_n, поне r не са съседи на u_n – а именно тези, всеки от които е вляво от съсед на u_1. Веднага следва, че $d_{G_i}(u_1)+d_{G_i}(u_n) \leq r+(n-1)-r = n-1$. Но тогава $d_{G_0}(u_1) + d_{G_0}(u_n) \leq r + (n-1) - r = n-1$, понеже G_i се получава от G_0 с добавяне на нула или повече ребра. Обаче по условие $d_{G_0}(u_1) + d_{G_0}(u_n) \geq n$, понеже $(u_1, u_n) \notin E$. Полученото противоречие показва, че началното ни допускане, а именно че $G = G_0$ не е Хамилтонов, е погрешно. $\square$