16.12.2013

Задача 1. Намерете коефициента пред x^2y^7 в $(x+y)^9$.

Док. Използваме, че

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

Тогава е ясно, че коефициента пред x^2y^7 е $\binom{9}{2} = 36$. $\square$

Задача 2. Дайте пример за безкрайна релация R, за която е изпълнено, че

$$R^{-1} \subseteq R.$$

Док. Релацията трябва да е симетрична. Например,

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x = y\},$$

или

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid |x - y| = 6\}.$$

$\square$

Задача 3. Докажете, че

а $3|(2^{2n} + 5)$;

б $9|(2^{2n} + 15n - 1)$.

Док. Доказателство с индукция по n.

а) За $n = 0$, $3|(2^0 + 5)$. Ще докажем твърдението за $n > 0$. Нека $n = k + 1$. Тогава

$$2^{2k+2} + 5 = 2^{2k} + 5 + 3 \cdot 2^{2k}.$$

От и.п. имаме, че $3|2^{2k}+5$. Понеже е очевидно, че $3|3\cdot 2^{2k}$, то $3|(2^{2k+2}+5)$.

б) Нека $n = 0$. Тогава $9|(1 - 1)$. Ще докажем твърдението за $n > 0$. Нека $n = k + 1$. Тогава

$$2^{2k+2} + 15(k+1) - 1 = 4 \cdot 2^{2k} + 15k + 15 - 1 = 2^{2k} + 15k - 1 + 3(2^{2k} + 5)$$

От и.п., $9|(2^{2k} + 15k - 1)$. От а), $3|(2^{2k} + 5)$ и следователно, $9|3(2^{2k} + 5)$. Заключаваме, че $9|(2^{2k+2} + 15(k+1) - 1)$.

$\square$

Задача 4. Нека е дадено уравнението $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$.

а) Колко решения в естествените числа има уравнението, ако $x_4 = 3$?

б) Колко решения в естествените числа има уравнението, ако $x_3 \geq 3$ и $x_1 \geq 2$?

Док. В общия случай, броят на решенията в естествените числа на уравнения от вида:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

се изчислява по формулата

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

а) Трябва да намерим броя на решенията на $x_1 + x_2 + x_3 = 12$. Те са $\binom{14}{2}$ на брой.

б) Ще приложим принципа за включване и изключване, т.е. от всички решения, $\binom{18}{3}$ ще извадим невалидните решения.

Да означим с A_3 - решенията за $x_3 < 3$. Да означим с A_1 - решенията за $x_1 < 2$. Тогава

$$\begin{aligned}|A_1| &= \binom{17}{2} + \binom{16}{2},\\ |A_3| &= \binom{17}{2} + \binom{16}{2} + \binom{15}{2},\\ |A_1 \cap A_3| &= \binom{16}{1} + \binom{15}{1} + \binom{14}{1} + \binom{15}{1} + \binom{14}{1} + \binom{13}{1}.\end{aligned}$$

Крайният отговор е

$$\binom{18}{3} - |A_1| - |A_3| + |A_1 \cap A_3|.$$

□

17.12.2013

Задача 5. Нека R е релация, за която е изпълнено условието $R^{-1} = R$. Може ли да твърдим, че R е симетрична? Обосновете се!

Док. По определение,

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Също така по определение R е симетрична, ако

$$(\forall x, y)[\langle x, y\rangle \in R \ \rightarrow \ \langle y, x\rangle \in R].$$

Нека $R^{-1} = R$. Можем да твърдим, че релацията е симетрична, защото ако $\langle x, y\rangle \in R$, то $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$ и следователно $\langle y, x\rangle \in R$. □

Задача 6. Докажете, че

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

Док. Индукция по n.

За $n = 0$,

$$\sum_{i=0}^{0}(2i+1)^2 = 1 = \frac{(0+1)(0+1)(0+3)}{3} = \frac{3}{3}.$$

За $n > 0$, нека $n = k + 1$. Тогава

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1}(2i+1)^2 &= \sum_{i=0}^{k}(2i+1)^2 + (2k+3)^2 \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} + \frac{3(2k+3)^2}{3} \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3) + 3(2k+3)^2}{3} \\
&= \frac{(2k+3)((k+1)(2k+1) + 3(2k+3))}{3} \\
&= \frac{(2k+3)(2k^2+9k+10)}{3} \\
&= \frac{(2k+3)(2k+5)(k+2)}{3}
\end{aligned}$$

□

Задача 7. Докажете, че

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Док. Индукция по n.

- За $n = 0$ е ясно.
- За $n > 0$, нека $n = k + 1$. Да приемем, че твърдението е вярно за k. Тогава

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4(k+1))}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

□

Задача 8. Докажете, че

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Док. Индукция по n.

- За $n = 0$ е ясно.
- За $n > 0$, нека $n = k + 1$. Да приемем, че твърдението е вярно за k. Тогава

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k(2k+1)+6k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k - \frac{-7-\sqrt{49-48}}{4})(k - \frac{-7+\sqrt{49-48}}{4})}{6} \\
&= \frac{(k+1)2(k+\frac{3}{2})(k+2)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

$\square$

Задача 9. Нека U е множество с n елемента.

а) Намерете броя на двойките (X, Y), $X, Y \subseteq U$.

б) Намерете броя на двойките (X, Y), $X, Y \subseteq U$, за които $|X| \geq 2$ и $|Y| \geq 3$.

Док.

а) Ние знаем, че всички подмножества на U са 2^n на брой. Тогава всички двойки подмножества (X, Y) са $2^n \cdot 2^n = 4^n$.

б) Прилагаме принципа за включване и изключване.

Нека A_1 са двойките (X, Y), за които $|X| < 2$. Пресмятаме ги като разгледаме два случая:

- $X = \emptyset$. Броят на всички такива (X, Y) е 2^n.
- $X = \{u\}$, за някое $u \in U$. Броят на всички такива (X, Y) е $\binom{n}{1}2^n$.

Нека A_2 са двойките (X, Y), за които $|Y| < 3$. Пресмятаме ги като разгледаме три случая:

- $Y = \emptyset$. Броят на всички такива (X, Y) е 2^n.
- $Y = \{u\}$, за някое $u \in U$. Броят на всички такива (X, Y) е $\binom{n}{1}2^n$.
- $Y = \{u, u'\}$, за някои $u, u' \in U$. Броят на всички такива (X, Y) е $\binom{n}{2}2^n$.

Тогава $A_1 \cap A_2$ са всички двойки (X, Y), където $|X| < 2$ и $|Y| < 3$. Остава да пресметнем техния брой. Трябва да разгледаме 6 случая.

- $|X| = |Y| = 0$. Очевидно само една двойка отговаря на това условие, $(\emptyset, \emptyset)$, т.е. броят на тези двойки е 1.
- $|X| = 0$, $|Y| = 1$. Техният брой е n.
- $|X| = 0$, $|Y| = 2$. Техният брой е $\binom{n}{2}$.
- $|X| = 1$, $|Y| = 0$. Техният брой е n.
- $|X| = |Y| = 1$. Техният брой е n^2.
- $|X| = 1$, $|Y| = 2$. Техният брой е $n\binom{n}{2}$.

Получаваме, че

$$|A_1| = 2^n + n2^n$$
$$|A_2| = 2^n + n2^n + \binom{n}{2}2^n$$
$$|A_1 \cap A_2| = 1 + n + \binom{n}{2} + n + n^2 + n\binom{n}{2}.$$

Следователно броят на множествата е:

$$4^n - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.$$

□

18.12.2013

Задача 10. Колко различни думи могат да се получат като разбъркаме буквите на думата АБРАКАДАБРА?

Док. Общият брой букви е 11. Броят на буквите А е 5, на Б е 2, на Р е 2, на К е 1, на Д е 1. Следователно общият брой думи, който може да се получи като разместим тези букви е

$$\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}.$$

□

Задача 11. Дайте пример за релации R и S, за които $R \circ S \neq S \circ R$.

Док. Могат да се дадат много примери. По определение,

$$R \circ S = \{\langle x, y\rangle \mid (\exists z)[\langle x, z\rangle \in S \;\&\; \langle z, y\rangle \in R].$$

Нека изберем три елемента като $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$. Да определим $R = \{\langle a, b\rangle\}$ и $S = \{\langle b, c\rangle\}$. Тогава

$$R \circ S = \emptyset,$$

$$S \circ R = \{\langle a, c\rangle\}.$$

Да разгледаме и друг пример. Нека

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \ \&\ x < y\},$$

$$S = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \ \&\ x > y\}.$$

Да разгледаме $\langle 0, 1\rangle \in R$ и $\langle 1, 0\rangle \in S$. Тогава $\langle 0, 0\rangle \in S \circ R$. Ако $\langle 0, 0\rangle \in R \circ S$, то това означава, че $\langle 0, z\rangle \in S$ и $\langle z, 0\rangle \in R$, за някое $z \in \mathbb{N}$. Но това означава, че $0 > z$ и $z < 0$, което е невъзможно. Следователно, $R \circ S \neq S \circ R$. □

Задача 12. Докажете, че $2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

Док. Индукция по n. Ще използваме свойството, че $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, за $k > 0$.

- За $n = 0$, $2^0 = 1\binom{0}{0} = 1$;
- За $n > 0$, нека $n = k + 1$. Да приемем, че твърдението е вярно за k. Тогава

$$\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2 \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \\
&= \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{k} (\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}) + \binom{k}{k} \\
&= \binom{k+1}{0} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} + \binom{k+1}{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i}.
\end{aligned}$$

□

Задача 13. Докажете, че:

а) ако n^2 е четно, то n също е четно

б) $\sqrt{2}$ е ирационално число.

Док.

а) Нека n^2 е четно, но допуснем, че n е нечетно. Тогава $n = 2k + 1$ и $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, което е нечетно, защото $4k^2 + 4k$ е четно. Това е противоречие.

б) Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално. Тогава $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, като можем да изберем p и q да бъдат взаимно прости. Получаваме, че

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{p^2}{q^2} \\
2q^2 &= p^2
\end{aligned}$$

Следователно p^2 е четно и от а) получаваме, че $p = 2n$, за някое n. Тогава

$$\begin{aligned} 2q^2 &= 4n^2 \\ q^2 &= 2n^2 \end{aligned}$$

И отново, q^2 е четно, следователно $q = 2m$, за някое m. Но тогава

$$2|p \ \& \ 2|q.$$

p и q не са взаимно прости и така достигаме до противоречие с нашия избор на p и q.

$\square$