Нека $I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq n\}$.

Задача 1. Нека $A = I_{1000}$. Релацията $R \subseteq A \times A$ дефинираме така:
$\forall a \in A\ \forall b \in A: aRb\ \leftrightarrow (\exists 0 \leq c < 7\ \exists 0 \leq d < 7: a \equiv c\ (mod\ 7) \wedge b \equiv d(mod\ 7) \wedge c \leq d)$.
Изследвайте релацията R за шестте свойства изучавани на лекции. (20 т.)
Ако R е релация на еквивалентност, опишете с думи класовете на еквивалентност. Ако R е релация на частична наредба, но не и линейна, дайте пример за несравними елементи на множеството A. Ако R е линейна наредба, запишете минималния и максималния елемент от A. Ако R не попада в никоя от категориите, запишете защо това е така, т.е кое/кои свойство/свойства не притежава R, за да бъде релация на еквивалентност, релация на частична наредба или релация на линейна наредба. (10 т., които се получават, само ако първата част на задачата е вярна)

Решение:
Ключовото наблюдение в тази задача е, че ако $a \in A$ и $0 \leq c < 7$ е такова, че $a \equiv c\ (mod\ 7)$, то c е точно остатъкът, който дава a при деление на 7, т. е. $\forall a \in A \forall b \in A: aRb$ т.с.т.к. остатъкът на a при деление на 7 е по-малък или равен от остатъкът на c при деление на 7. И така разглеждаме шестте свойства, изучавани на лекции:

- Рефлексивност:
  Нека $a \in A$ е произволно. Очевидно остъткът на a при деление на 7 е по-малък или равен на себе си.
  Следователно R е рефлексивна.
- Антирефлексивност:
  Тъй като A е рефлексивна, то тя няма как и да е антирефлексивна (като контрапример може да вземем кое да е $a \in A$ и от горното знаем, че aRa).
- Симетричност:
  Да вземем $8 \in A$ и $9 \in A$.
  Остатъците, които дават при деление на 7 са съответно 1 и 2.
  $1 \leq 2$ следователно $8R9$, но очевидно обратното ($9R8$) не е вярно.
  От тук получаваме, че R не е симетрична.
- Антисиметричност и силна антисиметричност:
  Да вземем $10 \in A$ и $17 \in A$.
  И двете числа дават остаттък 3 при деление на 7, следователно $10R17$ и $17R10$, но $10 \neq 17$.
  Така получаваме, че R не е антисиметрична, а от там не е и силно антисиметрична, тъй като силната антисиметричност е частен случай на антисиметричността.
- Транзитивност
  Нека $a, b, c \in A$ са произволни елементи на A, за които е едновременно изпълнено, че: aRb и bRc.
  От тук получаваме, че остатъкът на a при деление на 7 е по-малък или равен на остатъка на b при деление на 7, който пък от своя страна е по-малък или равен на остатъка на c при деление на 7. От транзитивността на $\leq$ получаваме, че остатъкът на a при деление на 7 е по-малък или равен на остатъка на c при деление на 7, т. е. aRc.
  Така доказахме, че R е транзитивна.

R не е симетрична и затова не е релация на еквивалентност.
R не е антисиметрична и затова не е частична наредба.
R не е силно антисиметрична и затова не е линейна наредба.

Задача 2. Нека A е крайно множество и $|A| = n \in \mathbb{N}$. Колко бинарни хомогенни релации има над A, които са рефлексивни и не са нито симетрични, нито силно антисиметрични? (35 т.)
<u>Упътване</u>: Колко са рефлексивните симетрични релации? А рефлексивните силно антисиметрични?

Решение:

Първо ще намерим броя на рефлексивните релации без допълнителни ограничения:
Знаем, че всяка наредена двойка от вида (a, a), където $a \in A$ е част от релацията, т. е. за тях избор нямаме.

Освен тях имаме $n(n-1)$ наредени двойки от вида (a, b), където $a, b \in A, a \neq b$, всяка от които или е, или не е част от релацията независимо от останалите. Окончателно рефлексивните релации над A са $2^{n(n-1)}$ на брой.

Намираме броя на рефлексивните симетрични релации:
Знаем, че всяка наредена двойка от вида (a, a), където $a \in A$ е част от релацията, т. е. за тях избор нямаме. Освен това за всяко двуелементно подмножество $\{a, b\}$ на A е изпълнено, че или $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$, или $(a, b) \notin R \wedge (b, a) \notin R$. Броят на тези подмножества е $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Окончателно броят на рефлексивните симетрични релации над A е: $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Намираме броя на рефлексивните силно антисиметрични релации:
Знаем, че всяка наредена двойка от вида (a, a), където $a \in A$ е част от релацията, т. е. за тях избор нямаме. Освен това за всяко двуелементно подмножество $\{a, b\}$ на A е изпълнено, че или $(a, b) \in R \wedge (b, a) \notin R$, или $(a, b) \notin R \wedge (b, a) \in R$. Броят на тези подмножества е $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Окончателно броят на рефлексивните симетрични релации над A е: $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Няма релация, която да е едновременно симтрична и силно антисиметрична, следователно броят на рефлексивните релации, които не са нито симетрични, нито силно антисиметрични е:

$$2^{n(n-1)} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{n(n-1)} - 2.2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{n(n-1)} - 2^{\frac{n(n-1)}{2}+1} = 2^{n(n-1)} - 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Задача 3. В един клас от 10 ученици двама са без домашно. За една минута учителят може да избере произволни четирима и да разбере дали сред тях има ученик, който е без домашно. Докажете, че учителят не може да разбере със сигурност кои са учениците без домашно, за пет минути или по-малко. (35 т.)
<u>Упътване</u>: Колко са състоянията, които могат да се „кодират“ с 5 въпроса с отговор „да“ или „не“? А колко са възможностите да се изберат двама ученици, които да са без домашно?

Решение:

Нека за улеснение си представим, че учителят за една минута избира четирима ученици и пита някаква машина дали всички те имат домашно и тя винаги отговаря вярно.
С 5 въпроса, чийто отговор може да бъде само „да“ или „не“ (същото като „и четиримата са с домашно“ или „сред четиримата има поне един без домашно“) могат да се „кодират“ 32 състояния. Това е така, тъй като в началото учителят избира четирима, за които да зададе въпроса си и след всеки въпрос получава един от два отговора, след което (освен след петия въпрос) той избира следващ въпрос, който да зададе. Цялата тази последователност може да се „кодира“ еднозначно само с отговорите на въпросите. Самите въпроси не носят информация, тъй като всеки въпрос е еднозначно определен от досегашните отговори. В крайна сметка имаме 5 въпроса всеки с два възможни отговора или $2^5 = 32$ възможности.
От друга страна начините, по които от 10 ученици могат да се изберат двама, които да са без домашно са $\binom{10}{2} = 45 > 32$.
От принципа на Дирихле получаваме, че има 2 комбинации от двама ученици без домашно, които съответстват на една и съща последователност от въпроси и отговори и в този случай учителят няма как да знае коя е правилната комбинация.

Бонус (20 т.): Докажете, че за 6 минути учителят може да разбере със сигурност кои са учениците без домашно.

Решение:

Нека номерираме учениците по някакъв начин с числата от 1 до 10.
Нека „не“ означава, че има някой без домашно в четворкат, а „да“ означава, че всички са с домашно в четворката.
Задаваме въпрос за учениците с номера 1, 2, 3, 4. (1 мин.)
Задаваме въпрос за учениците с номера 5, 6, 7, 8. (2 мин.)
Ако и двата отговора са „да“ е ясно, че учениците без домашно са с номера 9 и 10.

Ако и двата отговора са „не“ е ясно, че във всяка от двете двойки има точно един без домашно, а учениците с номера 9 и 10 са с домашно.
Задаваме въпрос за ученици 1, 2, 9, 10. Ако отговорът е „да“, то учникът без домашно от първата четворка е сред 3 и 4, а ако е „не“, то ученикът без домашно от първатаа четворка е сред 1 и 2. (3 мин.)
Нека б. о. о. отговорът е „да“. Задаваме въпрос за 1, 2, 3, 10. Ако отговорът е „да“, то ученик 4 е без домашно, ако е „не“ то ученик 3 е без домашно. (4 мин.)
По аналогичен начин за още две минути намираме и вторият без домашно от втората четворка и сме готови за 6 минути.
Ако отговорът на единия въпрос е „да“, а на другия е „не“, нека б. о. о. 5, 6, 7, 8 са с домашно.
Задаваме въпрос за 5, 6, 9, 10. (3 мин.) (а)
Ако отговорът е „да“, то сред 1, 2, 3, 4 има двама без домашно, а всички останали са с домашно.
Последователно задаваме въпроси за (1, 5, 6, 7), (2, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 7) (6 мин.), след което ако сме получили два пъти отговор „не“ е ясно кои са с ненаписано домашно, а ако сме получили само един отговор „не“, то единият без домашно е ясен, а другият е с номер 4.
Ако отговорът на (а) е „не“, то сред 1, 2, 3, 4 има точно един без домашно и сред 9, 10 има точно един без домашно и сме изразходвали 3 минути. Е, вече видяхме как за две минути можем да намерим един без домашно от четирима и за една минута един от двама, стига да имаме достатъчно със сигурно домашно (за 5, 6, 7 и 8 знаем, че са с домашно).