Примерни решения на семестриалното контролно по Дискретни Структури, КН 2 поток, 24.11.2024 г.

Зад. 1 По колко начина Дядо Коледа може да раздаде 200 неразличими подаръци на 100 деца

5 т. **а)** без ограничения;

5 т. **б)** с единственото ограничение всяко дете да получи поне един подарък?

Решение: Задачата може да се моделира чрез слагане на m неразличими топки в n различни кутии, като топките са подаръците, а кутиите са децата.

В подусловие **а)** се иска броят на всички такива слагания. Съгласно изучаваното на лекции, този брой е $\binom{m+n-1}{n-1}$. В конкретната задача, $m = 200$ и $n = 100$, така че отговорът е $\binom{200+100-1}{100-1} = \binom{299}{99}$. Численият отговор, който не се иска, е

$$1\,386\,083\,821\,086\,188\,248\,261\,127\,842\,108\,801\,860\,093\,488\,668\,581\,216\,236\,221\,011\,219\,101\,585\,442\,774\,669\,540 \approx 10^{82}$$

В подусловие **б)** се иска броят на тези слагания, в които всяка кутия има поне една топка. Съгласно изучаваното на лекции, този брой е $\binom{m-1}{m-n}$. В конкретната задача, $m = 200$ и $n = 100$, така че отговорът е $\binom{200-1}{200-100} = \binom{199}{100}$. Численият отговор, който не се иска, е

$$45\,274\,257\,328\,051\,640\,582\,702\,088\,538\,742\,081\,937\,252\,294\,837\,706\,668\,420\,660 \approx 10^{59}$$

Зад. 2 Нека $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$. Докажете тъждеството

$$\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$$

по два начина:

5 т. 1. чрез развиване на лявата страна, използвайки наготово изучаваното на лекции тъждество $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1}$ за $p, q \in \mathbb{N}^+$.

15 т. 2. чрез комбинаторни разсъждения.

Решение: Иска се да се докаже, че

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n-2}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} \tag{1}$$

Ето как става чрез развиване. Разглеждаме лявата страна $\binom{n+1}{m+1}$. Знаем, че

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} \tag{2}$$

Ако $n \geqslant m+1$, в сила е $\binom{n}{m+1} = \binom{n-1}{m+1} + \binom{n-1}{m}$. Заместваме в (2) и получаваме

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n-1}{m+1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} \tag{3}$$

Ако $n-1 \geqslant m+1$, в сила е $\binom{n-1}{m+1} = \binom{n-2}{m+1} + \binom{n-2}{m}$. Заместваме в (3) и получаваме

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n-2}{m+1} + \binom{n-2}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} \tag{4}$$

И така нататък. Общият вид на развиването е

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n-\ell}{m+1} + \binom{n-\ell}{m} + \binom{n-\ell+1}{m} + \cdots + \binom{n-2}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} \tag{5}$$

Максималната стойност на ℓ, за която има смисъл да се развива, е тази, която $\binom{n-\ell}{m}$ става единица, а $\binom{n-\ell}{m+1}$ става нула. Тази стойност е $\ell = n - m$. За $\ell = n - m$, (5) става

$$\binom{n+1}{m+1} = \underbrace{\binom{m}{m+1}}_{0} + \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \cdots + \binom{n-2}{m} + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} \tag{6}$$

Предвид факта, че $\binom{m}{m+1} = 0$, (6) става точно (1). Което и трябваше да докажем.

Сега ще докажем (1) с комбинаторни разсъждения. Нека S е множество от $n+1$ билета, номерирани с числата $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$. Лявата страна, а именно $\binom{n+1}{m+1}$, е броят на $(m+1)$-елементните подмножества на S. Нека X е множеството от $(m+1)$-елементните подмножества на S.

Разбиваме X на $n - m + 1$ дяла съобразно най-големия номер на билет. По-подробно написано, нека

$$X_k = \{A \in X \mid \max A = k\} \tag{7}$$

Забелязваме, че най-големият номер на билет в $(m+1)$-елементно подмножество на S е между m (помним, че номерата започват от 0, а не от 1) и n и тези граници са точни. Тогава разглеждаме X_k за $k \in \{m, m+1, \ldots, n\}$.

Очевидно $\{X_m, X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n\}$ е разбиване на X, защото максималният номер на билет в подмножество е уникален. Съгласно комбинаторния принцип на разбиването, в сила е

$$|X| = |X_m| + |X_{m+1}| + |X_{m+2}| + \cdots + |X_n|$$

Да запишем това по друг начин:

$$|X| = \sum_{k=m}^{n} |X_k|$$

Колко е $|X_k|$? Ако максималният елемент е k, останалите елементи-билети, а те са m на брой, са от множеството $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$. Възможностите да изберем m елемента от k-елементно множество са $\binom{k}{m}$ на брой. Тогава $|X_k| = \binom{k}{m}$. Тогава $|X| = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$. Както вече знаем, $|X| = \binom{n+1}{m+1}$. Тогава $\binom{n+1}{m+1} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$. Което и трябваше да покажем. $\square$

Зад. 3 Формулирайте теоремата на Нютон, изучавана на лекции. Докажете теоремата на Нютон по индукция. За базов случай вземете степенен показател единица.

Решение: Теоремата на Нютон гласи следното. За всеки две реални x и y, за всяко естествено n:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

За база вземаме $n = 1$. Лявата страна е $x + y$. Дясната страна е

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k y^{1-k} = \\
&\binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = \\
&1 \cdot x^0 \cdot y^1 + 1 \cdot x^1 \cdot y^0 = \\
&y + x
\end{aligned}$$

Лявата страна е равна на дясната. ✓

Индуктивното предположение е, че $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ за някое $n \geqslant 1$.

В индуктивната стъпка ще докажем, че

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \tag{8}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} = \\
&(x+y)^n \cdot (x+y) = \qquad // \text{ съгласно индуктивното предположение} \\
&\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot (x+y) = \\
&\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} \right)}_{A} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \right)}_{B}
\end{aligned} \tag{9}$$

Да разгледаме сумата A:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k+1-1} x^{k+1} y^{n+1-k-1} = \\
&\sum_{1 \leqslant k+1 \leqslant n+1} \binom{n}{(k+1)-1} x^{k+1} y^{n+1-(k+1)}
\end{aligned}$$

Преименуваме индексната променлива. Тъй като тя навсякъде се среща като "$k+1$" и освен това $k+1$ пробягва стойностите от 1 до $n+1$, имаме право да преименуваме $k+1$ на k, като k пробягва стойностите от 1 до $n+1$. И така, сумата A е:

$$A = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k}$$

Преписваме я така:

$$A = \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \right) + \underbrace{\binom{n}{n+1-1} x^{n+1} y^0}_{\text{за } k=n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0$$

Сумата B преписваме така:

$$B = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \right) = \underbrace{\binom{n}{0} x^0 y^{n+1}}_{\text{за } k=0} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \right) = \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \right)$$

Заместваме A и B със съответните изрази в (9) и получаваме

$$\begin{aligned}
&A + B = \\
&\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \right) = \\
&\binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 = \\
&\binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}} \right) x^k y^{n+1-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0
\end{aligned}$$

Но $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$, така че имаме

$$\begin{aligned}
A + B &= \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \right) + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Но това е дясната страна на (8). Доказахме, че лявата страна на (8) е равна на дясната на (8). Което и трябваше да докажем. $\square$

Зад. 4 Нека a, b и c са прости съждения. Докажете с еквивалентни преобразувания, че

$$(a \wedge b \to c) \wedge (a \wedge c \to b) \wedge (b \wedge c \to a) \equiv \neg(a \vee b) \vee \neg(a \vee c) \vee \neg(b \vee c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Решение: В сила е

$$\begin{aligned}
&(a \wedge b \to c) \wedge (a \wedge c \to b) \wedge (b \wedge c \to a) \equiv && // \text{ свойство на импликацията} \\
&(\neg(a \wedge b) \vee c) \wedge (\neg(a \wedge c) \vee b) \wedge (\neg(b \wedge c) \vee a) \equiv && // \text{ закон на Де Морган, асоц. на диз.} \\
&(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg c \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee a) \equiv && // \text{ комутативност на диз.} \\
&(\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) && \qquad (10)
\end{aligned}$$

Заради дистрибутивността на конюнкцията спрямо дизюнкцията, (10) е еквивалентен на:

$$\begin{aligned}
&(\underline{\neg a \wedge \neg a \wedge a}) \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee (\underline{\neg a \wedge b \wedge a}) \vee (\underline{\neg a \wedge b \wedge \neg b}) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee \\
&\qquad (\underline{\neg a \wedge \neg c \wedge a}) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&(\underline{\neg b \wedge \neg a \wedge a}) \vee (\neg b \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee (\underline{\neg b \wedge b \wedge a}) \vee (\underline{\neg b \wedge b \wedge \neg b}) \vee (\underline{\neg b \wedge b \wedge \neg c}) \vee \\
&\qquad (\neg b \wedge \neg c \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&(\underline{c \wedge \neg a \wedge a}) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\underline{c \wedge \neg a \wedge \neg c}) \vee \quad (c \wedge b \wedge a) \vee (\underline{c \wedge b \wedge \neg b}) \vee (\underline{c \wedge b \wedge \neg c}) \vee \\
&\qquad (\underline{c \wedge \neg c \wedge a}) \vee (\underline{c \wedge \neg c} \wedge \neg b) \vee (\underline{c \wedge \neg c \wedge \neg c})
\end{aligned}$$

Заради свойствата на отрицанието и свойствата на константите, всички подчертани съждения са еквивалентни на F, така че този израз се опростява до:

$$\begin{aligned}
&F \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee F \vee F \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee \\
&\qquad F \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&F \vee (\neg b \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee F \vee F \vee F \vee \\
&\qquad (\neg b \wedge \neg c \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&F \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee F \vee \quad (c \wedge b \wedge a) \vee F \vee F \vee \\
&\qquad F \vee F \vee F
\end{aligned}$$

Отново прилагаме свойството на константата F и опроставяме до:

$$\begin{aligned}
&(\neg a \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&(\neg b \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge a) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg c) \vee \\
&(c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (c \wedge b \wedge a)
\end{aligned}$$

Използвайки идемпотентността и комутативността на конюнкцията, опростяваме до

$$\begin{aligned}
&({\color{red}\neg a \wedge \neg b}) \vee ({\color{green}\neg a \wedge \neg c}) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee ({\color{blue}\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c}) \vee ({\color{green}\neg a \wedge \neg c}) \vee \\
&({\color{red}\neg a \wedge \neg b}) \vee ({\color{blue}\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c}) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee ({\color{brown}\neg b \wedge \neg c}) \vee ({\color{brown}\neg b \wedge \neg c}) \vee \\
&(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)
\end{aligned}$$

Използвайки идемпотентността и комутативността на дизюнкцията, опростяваме до

$$\begin{aligned}
&(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee \\
&(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee \\
&(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)
\end{aligned}$$

Заради комутативността на дизюнкцията, това може да се препише така

$$\begin{aligned}
&(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee \\
&\underbrace{(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)}_{X} \vee \\
&(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee \\
&(a \wedge b \wedge c)
\end{aligned}$$

Заради комутативността на конюнкцията и дистрибутивността на конюнкцията спрямо дизюнкцията и свойствата на константите, съждението X е еквивалентно на

$$X = (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \equiv (\neg a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg b) \equiv (\neg a \wedge \neg c) \vee F \equiv \neg a \wedge \neg c$$

Целият израз става

$$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Заради комутативността и идемпотентността на дизюнкцията, това се опростява до

$$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

което, заради комутативността на дизюнкцията, е еквивалентно на

$$\underbrace{(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)}_{Y} \vee \underbrace{(\neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)}_{Z} \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Прилагаме закона за поглъщането върху Y и Z и виждаме, че това е еквивалентно на

$$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Което, на свой ред, може да се препише в следния вид заради комутативността на дизюнкцията:

$$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Прилагайки трикратно закона на Де Морган, получаваме еквивалентното

$$\neg(a \vee b) \vee \neg(a \vee c) \vee \neg(b \vee c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Което и трябваше да покажем. $\square$

Зад. 5 За колко естествени числа, по-малки от $1\,000\,000$, е вярно, че сумата от цифрите им е равна на 19? Има се предвид, че числата са написани в десетична позиционна бройна система.

Дайте отговор-число.

Решение: Нека S е множеството $\{n \in \mathbb{N}^+ \mid n < 1\,000\,000\}$. Пита се колко елемента на S имат свойството записите им в десетична бройна система да имат сума от цифрите 19. Нека всяко число от S се записва с точно шест цифри. Това значи, че е възможно да има водещи нули, примерно 155 се записва като $000\,155$. Водещите нули не се отразяват на сумата от цифрите.

Щом цифрите са точно шест, можем да ги именуваме с x_1 (най-старшата), x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 (най-младшата). Тогава всяко $u \in S$, изразено чрез шестте си цифри, е

$$u = x_1 \cdot 10^5 + x_2 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_4 \cdot 10^2 + x_5 \cdot 10^1 + x_6 \cdot 10^0$$

Примерно, $155 = 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Търсеният отговор е броят на решенията на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 19$$

в естествени числа при следните ограничения:

$$0 \leqslant x_i \leqslant 9, \text{ за } 1 \leqslant i \leqslant 6$$

Общият брой на решенията на уравнението, без да отчитаме ограниченията, е броят на разполаганията на 19 неразличими топки в 6 различими кутии. Съгласно изучаваното на лекции, този брой е $\binom{19+6-1}{6-1} = \binom{24}{5}$. Стойността на този биномен коефициент е $42\,504$.

Да съобразим как ограниченията влияят на решението. Нека N_i е броят решенията на уравнението, в които цифрата x_i е "нарушител", тоест, стойността на x_i е поне 10, за $1 \leqslant i \leqslant 6$. Нека $N_{i,j}$ е броят решенията на уравнението, в които цифрите x_i и x_j са "нарушители", тоест, $x_i, x_j \geqslant 10$ за $1 \leqslant i < j \leqslant 6$. Нека $N_{i,j,k}$ е броят решенията на уравнението, в които цифрите x_i, x_j и x_k са "нарушители", тоест, $x_i, x_j, x_k \geqslant 10$ за $1 \leqslant i < j < k \leqslant 6$. Нека $N_{i,j,k,\ell}$ е броят решенията на уравнението, в които цифрите x_i, x_j, x_k и x_ℓ са "нарушители", тоест, $x_i, x_j, x_k, x_\ell \geqslant 10$ за $1 \leqslant i < j < k < \ell \leqslant 6$. Нека $N_{i,j,k,\ell,m}$ е броят решенията на уравнението, в които цифрите x_i, x_j, x_k, x_ℓ и x_m са "нарушители", тоест, $x_i, x_j, x_k, x_\ell, x_m \geqslant 10$ за $1 \leqslant i < j < k < \ell < m \leqslant 6$. Нека $N_{1,2,3,4,5,6}$ е броят на решенията на уравнението, в които всички цифри са нарушители.

Съгласно принципа на включването и изключването, търсеният отговор е

$$\binom{24}{5} - (N_1 + N_2 + \cdots + N_6) - (N_{1,2} + N_{1,3} + \cdots + N_{5,6}) + (N_{1,2,3} + N_{1,2,4} + \cdots + N_{4,5,6})$$
$$- (N_{1,2,3,4} + N_{1,2,3,5} + \cdots + N_{3,4,5,6}) + (N_{1,2,3,4,5} + N_{1,2,3,4,6} + \cdots + N_{2,3,4,5,6}) - N_{1,2,3,4,5,6}$$

Ключово наблюдение е, че всяко $N_{i_1,\ldots,i_t} = 0$ за $t \geqslant 2$, понеже няма как две или повече числа числа да бъдат поне 10, при положение, че всичките шест числа имат сума 19. Тогава търсеният отговор е

$$\binom{24}{5} - (N_1 + N_2 + \cdots + N_6) = \binom{24}{5} - 6 \cdot N_1$$

понеже очевидно $N_1 = N_2 = \cdots = N_6$.

Остава да намерим N_1. Тъй като $x_1 \geqslant 10$, заместваме x_1 с $x_1' + 10$, където x_1' е естествено число. N_1 е броят на решенията в естествени числа на уравнението

$$x_1' + 10 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 19$$

тоест, на

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$$

Съгласно изучаваното на лекции, броят на решенията е $\binom{9+6-1}{6-1} = \binom{14}{5} = 2\,002$.

Тогава отговорът е

$$\binom{24}{5} - 6 \cdot \binom{14}{5} = 42\,504 - 6 \cdot 2\,002 = 42\,504 - 12\,012 = 30\,492$$

□

Зад. 6 Нека $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Колко релации на еквивалентност $R \subseteq S \times S$ има? Дайте отговор-число. Отговорът Ви трябва да е добре обоснован.

Решение: Както знаем от лекции, всяка релация на еквивалентност се дефинира напълно от своите класове на еквивалентност. На свой ред, всеки клас на еквивалентност е едно разбиване на опорното множество S. И така, отговорът е същият като отговора на задача "Колко разбивания на S има?".

Нека $p(n)$ е броят на разбиванията на n-елементно множество. Както знаем от първото домашно, в сила е

$$p(0) = 1$$
$$p(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p(k) \text{ , за } n \geqslant 0$$

Този резултат може да се ползва сега наготово.

В тази задача търсим $p(7)$ като числена стойност. В сила е

$$
\begin{aligned}
p(0) &= 1 \\
p(1) &= p(0+1) = \binom{0}{0}p(0) = 1 \cdot 1 = 1 \\
p(2) &= p(1+1) = \binom{1}{0}p(0) + \binom{1}{1}p(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\
p(3) &= p(2+1) = \binom{2}{0}p(0) + \binom{2}{1}p(1) + \binom{2}{2}p(2) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 \\
p(4) &= p(3+1) = \binom{3}{0}p(0) + \binom{3}{1}p(1) + \binom{3}{2}p(2) + \binom{3}{3}p(3) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15 \\
p(5) &= p(4+1) = \binom{4}{0}p(0) + \binom{4}{1}p(1) + \binom{4}{2}p(2) + \binom{4}{3}p(3) + \binom{4}{4}p(4) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 52 \\
p(6) &= p(5+1) = \binom{5}{0}p(0) + \binom{5}{1}p(1) + \binom{5}{2}p(2) + \binom{5}{3}p(3) + \binom{5}{4}p(4) + \binom{5}{5}p(5) \\
&= 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 15 + 1 \cdot 52 = 203 \\
p(7) &= p(6+1) = \binom{6}{0}p(0) + \binom{6}{1}p(1) + \binom{6}{2}p(2) + \binom{6}{3}p(3) + \binom{6}{4}p(4) + \binom{6}{5}p(5) + \binom{6}{6}p(6) \\
&= 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 15 + 6 \cdot 52 + 1 \cdot 203 = 877
\end{aligned}
$$

Отговорът е 877. □