Домашно №4 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Домашните работи се предават на съответния асистент на упражнение през седмицата 13.01.2014–17.01.2014.

Име: .... ФN°: .... Група: ......

Задача	1	2	3	4	5	6, бонус	Общо
получена оценка							
от максимално	*15*	*10*	*10*	*10*	*15*	***20***	*60*

Зад. 1 Докажете *чрез еквивалентни преобразувания*, че следните две формули са еквивалентни:

$$U = (x \downarrow \overline{y}) \rightarrow (\overline{x}\, z \rightarrow ((\overline{x} \,|\, (y \equiv z)) \vee (\overline{x}\overline{y} \oplus z)))$$
$$V = ((x \rightarrow y) \,|\, (x \downarrow (y\, \overline{z}))) \vee \overline{y}\overline{z}$$

Можете да използвате само следните еквивалентни преорбазувания наготово:

- Свойствата на булевите функции на страница 206 в учебника.
- Свойството на импликацията $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$.
- Свойството на стрелката на Пърс $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$.
- Свойството на чертата на Шефер $x_1 \,|\, x_2 = \overline{x_1 x_2}$.
- Свойството слепване на страница 207 в учебника, а именно $f\, x \vee f\, \overline{x} = f$.
- Свойството поглъщане на страница 207 в учебника, а именно $f\, g \vee f = f$.
- $p \equiv q = \overline{p \oplus q}$.
- $p \oplus q = \overline{p}\; q \vee p\; \overline{q}$.

Знакът за равенство $=$ в този случай има смисъл на знак за еквивалентност; тоест, формулата от лявата страна е еквивалентна на формулата от дясната страна. Причината да използваме знака за равенство е, че типичният знак за еквивалентност $\equiv$ е "зает" от булевата функция *еквивалентност* (виж стр. 205 в учебника).

Припомняме, че обикновено конюнкцията се записва без знак, примерно xy наместо $x \wedge y$.

Забележете разликата между $\overline{x_1 x_2}$ и $\overline{x_1}\;\overline{x_2}$: първото е негация на конюнкцията, второто е конюнкция на негациите.

Зад. 2 Напишете съвършената дизюнктивна нормална форма на булевата функция на три променливи $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

Зад. 3 Напишете съвършената конюнктивна нормална форма на булевата функция на три променливи $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

Зад. 4 Напишете полинома на Жегалкин булевата функция на три променливи $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \rightarrow z$.

Зад. 5 Докажете, че във всяка симетрична булева функция, различна от константа, всяка променлива е съществена.

Дефиниции и пояснения. Булева функция се нарича симетрична, *ако винаги запазва стойността си при размяна на местата на променливите. Формално, ако променливите са* n, *функцията* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *е симетрична тогава и само тогава, когато*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n))$$

за всяка пермутация π *на променливите. Примерно, ако* $n = 2$, *функция да е симетрична е същото като да е комутативна; ако* $n = 3$, *функцията е симетрична, т.с.т.к.*

$$f(x, y, z) = f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y) = f(z, y, x)$$

Лесно е да се съобрази, че функция е симетрична т.с.т.к. за всяко k, $0 \leq k \leq n$, *стойността ѝ върху всички два вектора с тегло* k *е една и съща. Тривиално следва, че броят на симетричните функции е* 2^{n+1}.

За дадена булева функция на n *променливи* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *казваме, че променливата* x_i *е* съществена, *ако съществува стойност на вектора* $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n$, *такава че*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots x_n) \neq f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

Примерно, във функцията константа-нула нито една променлива не е съществена.

Зад. 6, бонус Дадени са множествата $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$ и $E = \{e_1, e_2\}$. Да ги наречем *домейните*. Колко са релациите от вида $R \subseteq A \times B \times C \times D \times E$? За колко от тях е изпълнено, че за всеки домейн, всеки негов елемент се среща в поне един елемент на релацията? И на двата въпроса от Вас се очаква да дадете отговор-формула, който да бъде добре обоснован, последван от отговор-число. Ако имате правилен отговор-формула, даването на числен отговор е тривиално. Можете да използвате обикновен калкулатор или какъвто и да е софтуер, за да получите числата.

Упътване: Можете да направите следната елементарна проверка на верността на Вашия отговор. Отговорът-формула трябва по някакъв начин да съдържат числото 5, понеже домейните са пет. Разгледайте по-простата задача, която се получава от дадената, ако домейните са само два, пак с по два елемента всеки. Тази задача е достатъчно проста, за да може да се реши числено на ръка за няколко минути, ако трябва с изчерпателно написване на конфигурациите, за които става дума. Числените отговори на опростената задача би трябвало да са равни на резултите от заместването на 5 с 2 в отговорите на оригиналната задача.

Второ упътване: Релациите в ***Зад. 6*** не са бинарни. Почти всичко, изучавано на лекции за релации, е за бинарни релации и не е приложимо в случая.