Примерно решение на домашно №3 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Зад. 1 В някаква до този момент стерилна хранителна среда попада бактерия в 8 часа сутринта. Бактериите се размножават чрез делене: на всеки половин час всяка бактерия се дели на две. Приемете, че бактерии не умират.

1. Напишете рекурентно отношение за $S(n)$, където $S(n)$ е броят на бактериите в момент $n \times 30$ минути след 8 сутринта, а $n \in \mathbb{N}$.
2. Решете полученото рекурентно отношение чрез метода с характеристичното уравнение. Решения чрез други методи не се допускат.
3. Колко бактерии ще има в 8 часа вечерта на същия ден?

Решение: Рекурентното отношение е

$$\begin{aligned} &S(0) = 1 \\ &S(n) = 2S(n-1) \qquad \text{за } n \geq 1 \end{aligned}$$

Характеристичното уравнение е

$$x - 2 = 0$$

с единствен корен 2. Общото решение на рекурентното отношение е

$$S(n) = A2^n$$

за някаква константа A. Тъй като $S(0) = 1$ по условие, имаме

$$1 = A2^0$$

Следователно, $A = 1$ и $S(n) = 2^n$. В 8 вечерта бактериите ще са $2^{2(20-8)} = 16\,777\,216$. □

Зад. 2 Тази задача е усложнение на **Задача 1**. Сега допускаме, че бактериите умират, като продължителността на живота на всяка бактерия е точно един час. Допускаме освен това, че при делене на бактерия не се създават две нови (с възраст нула) бактерии, а от старата бактерия се отделя една нова (с възраст нула), като старата бактерия или продължава да живее, ако възрастта ѝ е по-малка от един час (тоест, половин час), или умира, ако е "навършила" един час. (Очевидно всяка бактерия отделя нова бактерия точно два пъти и веднага след това умира). Деленето на бактерии е мигновено. Първата бактерия е (тази в 8 сутринта) е била на възраст нула, попадайки в средата.

1. Напишете рекурентно отношение за $T(n)$, където $T(n)$ е броят на оставащите да живеят бактерии в момент $n \times 30$ минути след 8 сутринта, а $n \in \mathbb{N}$.
2. Решете полученото рекурентно отношение.
3. Колко бактерии ще има в 8 часа и 1 минута вечерта на същия ден? Не е задължително отговорът Ви да е получен чрез заместване в решението на рекурентното отношение; може да изведете бройката, използвайки самото рекурентно отношение, а не решението му.

Решение: Рекурентното отношение не е уникално. Една възможност е:

$$\begin{aligned}
T(0) &= 1\\
T(1) &= 2\\
T(2) &= 3\\
T(n) &= 2T(n-1) - T(n-3) \qquad \text{за } n \geq 3
\end{aligned} \tag{1}$$

Разсъждението е следното. Нека дефинираме, че *момент* за целите на това решение е кръгъл час или кръгъл час и 30 мин. и нищо друго, започвайки от 8 ч. сутринта. Тоест, моментите са $t_0 = 08{:}00$, $t_1 = 08{:}30$, $t_2 = 09{:}00$, и така нататък. В t_0 часа има точно една бактерия, първоначално попадналата, на възраст нула. В t_1 тя отделя нова бактерия. В t_2 от първоначалната се отделя второ нейно копие и тя веднага умира и втората също отделя свое копие. Във всеки следващ момент t_n броят на бактериите е два пъти пъти по-голям от броя им в t_{n-1}, но не всички от тях остават живи. Тези, които умират, са точно бактериите, родени в t_{n-2} (родените преди час); техният брой е равен на броя на всички бактерии в момент t_{n-3}.

Забележете, че бактериите, които умират, не са всички бактерии от t_{n-2}, а само *родените* в t_{n-2}. В t_{n-2} освен тях има и други бактерии, които междувременно са умрели (а именно, в t_{n-1}). Следователно, рекурентното отношение е $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$ *не е решение на тази задача.*

Характеристичното уравнение е

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

Чрез метода на Хорнер факторизираме лявата страна до $(x-1)(x^2-x-1)$ и след решаването на квадратното уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ с корени $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ и $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ получаваме следното мултимножество от корените на характеристичното уравнение:

$$\left\{1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right\}_M$$

Тогава общото решение на рекурентното отношение е

$$T(n) = A \times 1^n + B \times \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + C \times \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n$$

където A, B и C са някакви константи. Тях определяме, използвайки началните условия

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + C\\
2 &= A + \frac{B}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) + \frac{C}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\\
3 &= A + \frac{B}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + \frac{C}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)^2
\end{aligned}$$

с решения $A = 0$, $B = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}$, $C = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}$. И така, решението на рекурентното отношение е

$$T(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \tag{2}$$

В 8 часа и една минута вечерта на същия ден броят на бактериите ще е $T(24)$. Заместването на n с 24 в (2) би довело до трудности. По-лесно е да се развие рекурентното отношение (1):

n	$T(n)$
0	1
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144
11	233
12	377
13	610
14	987
15	1597
16	2584
17	4181
18	6765
19	10946
20	17711
21	28657
22	46368
23	75025
24	121393

В 8 ч. и една минута ще има $121\,393$ бактерии.

Интересно наблюдение е, че таблицата съдържа числа на Фибоначи, а именно $F_2, \ldots, F_{26}$, където числата на Фибоначи се дефинират чрез рекурентното отношение $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 2$. Това не е случайно съвпадение: тривиално се доказва, че числата на Фибоначи удовлетворяват рекурентното отношение $F_n = 2F_{n-1} - F_{n-3}$ за $n \geq 3$. Виждаме, че една и съща редица от числа може да бъде определена от различни рекурентни отношения. □

Зад. 3 За университета XYZ се твърди, че:

- Има общо има 6525 студента.
- От тях 5025 не са първокурсници.
- 3222 студента са взели курса по Анализ.
- 1332 студента са взели курса по Дискретни Структури (ДС).
- 1821 студента не са първокурсници и са взели Анализ.
- 1050 студента са взели Анализ и ДС.
- 603 студента не са първокурсници и са взели ДС.
- 429 студента не са първокурсници и са взели Анализ и ДС.

Възможно ли е тези данни да са верни?

Решение: Щом студентите са общо 6525 и от тях 5025 не са първокурсници, то

$$\text{броят на първокурсниците е } 6525 - 5025 = 1500 \tag{3}$$

Нека множеството от студентите, които не са първи курс и са взели Анализ, е X, а множеството на студентите, които не са първи курс и са взели ДС, е Y. Студентите, които не са първи курс, представляват универсум U', съдържащ както X, така и Y. По условие $|U'| = 5025$, $|X| = 1821$, $|Y| = 603$ и $|X \cap Y| = 429$. По принципа на включването и изключването по отношение на този универсум е изпълнено

$$|\overline{X} \cap \overline{Y}| = 5025 - (1821 + 603) + 429 = 3030$$

И така, 3030 студенти не са първи курс и не са взели нито Анализ, нито ДС. Тогава $5025 - 3030 = 3495$ студенти са поне едно от трите: първокурсници или взели Анализ или взели ДС. Нека A е множеството от студентите от първи курс, B са тези, които са взели Анализ, а C са тези, взели ДС. Току-що показахме, че $|A \cup B \cup C| = 3495$. По условие $|B| = 3222$ и $|C| = 1332$, а от (3) знаем, че $|A| = 1500$.

Щом 3222 студента са взели Анализ и 1821 не-първокурсници са взели Анализ, то 1401 първокурсници са взели Анализ. Щом 1332 студента са взели ДС и 603 не-първокурсници са взели Анализ, то 729 първокурсници са взели ДС. Тогава $|A \cap B| = 1401$ и $|A \cap C| = 729$. По условие, $|B \cap C| = 1050$.

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \leftrightarrow \\
&\qquad 3495 = 1500 + 3222 + 1332 - (1401 + 729 + 1050) + |A \cap B \cap C| \leftrightarrow \\
&|A \cap B \cap C| = 621
\end{aligned}$$

Отново прилагаме принципа на включването и изключването, за да пресметнем $|(A \cap B) \cup (A \cap C)|$:

$$\begin{aligned}
&|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |(A \cap B)| + |(A \cap C)| - |A \cap B \cap C| \leftrightarrow \\
&|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = 1401 + 729 - 621 = 1509
\end{aligned} \tag{4}$$

И сега забелязваме противоречие между (3) и (4): първото казва, всички първокурсници са 1500, второто казва, че първокурсниците, взели поне един от Анализ и ДС, са 1509. Следователно, данните са неверни. □

Зад. 4 Докажете, че n-мерният хиперкуб е двуделен граф за всяко $n \geq 2$.

Решение: Върховете на n-мерният хиперкуб Q_n са точно булевите вектори с дължина n. Ребро между два вектора има тогава и само тогава, когато разликата между бройките на единиците в тях е единица. Следователно, ако има ребро между два върха, то единият от тях има четен брой единици, а другият, нечетен. С други думи, няма нито едно ребро между два върха с четен брой единици и няма нито едно ребро между два върха с нечетен брой единици. Тогава графът е двуделен, където единият дял са върховете с четен брой единици, а другият, тези с нечетен брой единици. □

Зад. 5 Нека A е произволно крайно непразно множество и P_1 и P_2 са произволни негови разбивания. Докажете, че следното можество $\mathcal{S}$ също е разбиване на A:

$$\mathcal{S} = \{X \cap Y \,|\, X \in P_1, Y \in P_2\} \setminus \{\emptyset\}$$

Решение: Очевидно $\mathcal{S}$ е множество от подмножества на A. То е разбиване, защото:

- няма елемент-празно множество, понеже след извършване на сеченията по двойки, изваждаме празното множество (ако има такова като елемент).

- всеки елемент a на A се съдържа в точно един елемент $\widetilde{X}$ на P_1 и всеки елемент на A се съдържа в точно един елемент $\widetilde{Y}$ на P_2, така че a се съдържа в точно един елемент на $\mathcal{S}$, а именно в елемента $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y}$.

- от горното съображение веднага следва, че всеки елемент на A се съдържа в някой елемент на $\mathcal{S}$ и че сечението на произволни различни елементи на $\mathcal{S}$ е празното множество. □

Зад. 6, бонус *На прием идват 20 човека, всеки от които познава поне 10 измежду останалите. На тържествената вечеря тези хора сядат около кръгла маса. Докажете, че има начин да бъдат наредени хората около масата така, че за всеки човек и двамата му/й съседи да бъдат измежду неговите/нейните познати.*

Решение: Да моделираме задачата с граф (неориентиран, не-мулти, без примки): върховете са хората и ребро между двама души има тогава и само тогава, когато те се познават. Такъв начин за разполагане на хората около кръглата маса има тогава и само тогава, когато в графа на познанствата има Хамилтонов цикъл.

Ще докажем по-общо твърдение: всеки граф G с n върха, където n е четно число, такъв че всеки връх v има степен $d(v) \geq \frac{n}{2}$, има Хамилтонов цикъл. Първо ще покажем, че G е свързан. Да допуснем, че не е свързан. Следователно, G има поне две свързани компоненти. Поне една от тях има $\leq \frac{n}{2}$ върха—обратното би означавало повече от n върха общо. Да разгледаме тази компонента като самостоятелен граф G'. Тъй като G' има $\leq \frac{n}{2}$ върха, максималната степен на връх в него е $\frac{n}{2} - 1$. Но от друга страна, всеки връх в G' има степен $\geq \frac{n}{2}$ по условие. Полученото противоречие доказва, че G е свързан.

Да разгледаме произволен най-дълъг път p в G:

$$p = u_1, u_2, \ldots, u_k$$

Става дума за прост път, такъв без повтаряне на върхове. Забелязваме, че всички съседи на u_1 са върхове от p и всички съседи на u_k са върхове от p—иначе p не би бил най-дълъг път. Ще покажем, че в G има цикъл, съдържащ точно върховете u_1, u_2, …, u_k. Нещо повече, ще покажем, че в G има ребро (u_1, u_k) или че за някой съсед u_j на u_1 (припомняме си, че всички съседи на u_1 са в p), където $2 \leq j \leq n-1$, върхът u_{j-1} е съсед на u_k. Да допуснем, че това не е вярно. Нека $N(u_1)$ е множеството от съседите на u_1 и нека $N(u_k)$ е множеството от съседите на u_k. Нека означим множеството $\{u_2, u_3 \ldots u_{k-1}\}$ с B. Както доказахме, всеки връх от $N(u_1)$ е връх от p. Съгласно текущото допускане

- $N(u_1) \subseteq B$
- $N(u_k) \subseteq B$ и
- $\forall u_t \in N(u_1) : u_{t-1} \notin N(u_k)$.

Тъй като $|N(u_1)| \geq \frac{n}{2}$, то в p съществуват $\frac{n}{2}$ върха, които не са от $N(u_k)$. Тогава в B съществуват $\frac{n}{2} - 1$ върха, които не са от $N(u_k)$, и освен това в B са върховете от $N(u_k)$, поне $\frac{n}{2}$ на брой. Тогава $|B| \geq \frac{n}{2} - 1 + \frac{n}{2} = n - 1$. Тогава в p има повече от n върха, което е невъзможно.

И така, в G има цикъл c с дължина k, чиито върхове са върховете от p. Да допуснем, че съществува връх v в G, който не е връх от c. Тъй като G е свързан, очевидно съществува връх w, който не е в c и е съсед на връх от c. Но тогава очевидно в G има път p', единият край на който е връх w, а останалита върхове са върховете на p (не непременно в порядъка, в който са в p). Но p' тогава е по-дълъг от p, което противоречи на това, че p е най-дълъг път в G.

Следователно, цикълът c е Хамилтонов. $\square$