Глава 6

Булеви функции

Да припомним таблицата за истинност за някои от основните булеви функции на два аргумента.

$x \oplus y$ - симетрична разлика

x	y	$\overline{x}$	$x \vee y$	xy	$x \to y$	$\overline{x} \vee y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x\overline{y} \vee \overline{x}y$
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	0

6.1 Основни свойства

Често вместо $x \wedge y$ пишем $x \cdot y$ или xy. Също така, вместо $\neg x$ пишем $\overline{x}$

1) Комутативни свойства

$$xy = yx, \quad x \vee y = y \vee x, \quad x \oplus y = y \oplus x$$

2) Асоциативни свойства

$$(xy)z = x(yz), \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

3) Лесно се проверява с таблиците за истинност, че:

$$x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$$

4) Свойства на отрицанието

$$x\overline{x} = 0, \quad x \vee \overline{x} = x \vee 1, \quad x \oplus \overline{x} = 1$$

5) Закон за двойното отрицание

$$\overline{\overline{x}} = x$$

6) Свойства на константите

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot 1 = x, \quad x \vee 0 = x, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \oplus 0 = x, \quad x \oplus 1 = \overline{x}$$

7) Дистрибутивни свойства

$$x(y \vee z) = xy \vee xz,$$
$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z),$$
$$(x \oplus y)z = xz \oplus yz.$$

8) Идемпотентентни свойства

$$xx = x, \quad x \vee x = x$$

9) Свойства на отрицанието

$$x\overline{x} = 0, \quad x \vee \overline{x} = 1, \quad x \oplus \overline{x} = 1$$

10) Закони на Де Морган

$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Задача 75. Проверете еквивалентни ли са формулите φ и ψ като използвате еквивалентни преобразования на формулите.

а) $\varphi = (x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z))$, $\psi = x \to ((y \to z) \to x)$;

б) $\varphi = (\overline{x} \vee \overline{y}.z) \to ((x \to y) \to (y \vee z) \to \overline{x})$, $\psi = (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;

в) $\varphi = (x.\overline{y} \vee \overline{x}.z) \oplus ((y \to z) \to \overline{x}.y)$, $\psi = (x.(\overline{y}.\overline{z}) \oplus y) \oplus z$;

г) $\varphi = x \to ((\overline{x}.\overline{y} \to (\overline{x}.\overline{z} \to y)) \to y).z$, $\psi = \overline{x.(y \to \overline{z})}$.

д) $\varphi = \overline{((x \vee y) \to y.z) \vee (y \to x.z)} \vee (x \to (\overline{y} \to z))$, $\psi = (x \to y) \vee z$.

Док.

-
$$\begin{aligned} \psi &= x \to ((y \to z) \to x) \\ &= \overline{x} \vee (\overline{y \to z} \vee x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= (x \oplus yz) \to (\overline{x} \to (y \to z)) \\ &= \overline{(x \vee yz)(\overline{x} \vee \overline{yz})} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\ &= \overline{(x \vee yz)} \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{yz})} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\ &= \overline{x}.\overline{yz} \vee xyz \vee x \vee \overline{y} \vee z \\ &= \overline{x}(\overline{y} \vee \overline{z}) \vee x \vee \overline{y} \vee z \\ &= \overline{x}.\overline{y} \vee \overline{x}.\overline{z} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\ &= \overline{x}.\overline{z} \vee x \vee \overline{y} \vee z \\ &= \overline{(x \vee z)} \vee (x \vee z) \vee \overline{y} = 1. \end{aligned}$$

- $\psi = (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x}) = \overline{\overline{x} \vee y} \vee y \vee \overline{x} = x\overline{y} \vee y \vee \overline{x} = x \vee y \vee \overline{x} = 1$

$$\begin{aligned} \varphi &= (\overline{x} \vee \overline{y}.z) \to ((x \to y) \to (y \vee z) \to \overline{x}) \\ &= \overline{\overline{x} \vee \overline{y}.z} \vee \overline{x \to y} \vee \overline{y \vee z} \vee \overline{x} \\ &= x(y \vee \overline{z}) \vee \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{y}.\overline{z} \vee \overline{x} = \\ &= xy \vee x\overline{z} \vee x.\overline{y} \vee \overline{y}.\overline{z} \vee \overline{x} = \\ &= x(y \vee \overline{y}) \vee x\overline{z} \vee \overline{y}.\overline{z} \vee \overline{x} = \\ &= x \vee \overline{x} \vee x\overline{z} \vee \overline{y}.\overline{z} = 1 \end{aligned}$$

- $\psi = (x.(\overline{y}.\overline{z}) \oplus y) \oplus z = x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus y \oplus z = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus x \oplus y \oplus z$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & = & (x\overline{y} \vee \overline{x}z) \oplus ((y \to z) \to \overline{x}y) \\
& = & (x\overline{y} \vee \overline{x}z) \oplus (\overline{\overline{y} \vee z} \vee \overline{x}y) \\
& = & x\overline{y} \oplus \overline{x}z \oplus (y\overline{z} \oplus \overline{x}y) \\
& = & x\overline{y} \oplus \overline{x}z \oplus \overline{x}y\overline{z} \oplus y\overline{z} \oplus \overline{x}y \\
& = & xy \oplus x \oplus xz \oplus z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus yz \oplus y \oplus xy \oplus y \\
& = & x \oplus xz \oplus z \oplus (x \oplus 1)y(z \oplus 1) \oplus yz \oplus \\
& = & x \oplus xz \oplus z \oplus xyz \oplus yz \oplus xy \oplus y \oplus yz \oplus \\
& = & x \oplus y \oplus z \oplus xz \oplus xy \oplus xyz
\end{array}$$

- $\psi = \overline{x.(y \to \overline{z})} = \overline{x} \vee yz.$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & = & x \to ((\overline{x}.\overline{y} \to (\overline{x}.\overline{z} \to y)) \to y).z \\
& = & \overline{x} \vee ((\overline{\overline{x}.\overline{y}} \vee \overline{\overline{x}.\overline{z}} \vee y) \to y).z \\
& = & \overline{x} \vee ((x \vee y \vee x \vee z \vee y) \to y).z \\
& = & \overline{x} \vee ((x \vee y \vee z) \to y).z \\
& = & \overline{x} \vee (\overline{x \vee y \vee z} \vee y).z \\
& = & \overline{x} \vee yz
\end{array}$$

- $\psi = (x \to y) \vee z = \overline{x} \vee y \vee z.$

$$\begin{array}{rcl}
\varphi & = & \overline{((x \vee y) \to y.z) \vee (y \to x.z)} \vee (x \to (\overline{y} \to z)) \\
& = & \overline{\overline{x}.\overline{y} \vee yz \vee \overline{y} \vee xz} \vee \overline{x} \vee y \vee z \\
& = & \overline{\overline{y} \vee yz \vee xz} \vee \overline{x} \vee y \vee z \\
& = & \overline{\overline{y} \vee z \vee xz} \vee \overline{x} \vee y \vee z \\
& = & \overline{\overline{y} \vee z} \vee \overline{x} \vee y \vee z \\
& = & y\overline{z} \vee \overline{x} \vee y \vee z \\
& = & \overline{x} \vee y \vee z.
\end{array}$$

□

6.2 Полином на Жегалкин

- Полином на Жегалкин на 2 променливи е формула от вида:

$$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_{12}x_1x_2,$$

  където a_0, a_1, a_2, a_{12} приемат стойности 0 или 1.

- Полином на Жегалкин на 3 променливи е формула от вида:

$$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3,$$

  където $a_0, a_1 \ldots, a_{123}$ приемат стойности 0 или 1.

- Полином на Жегалкин на n променливи е формула от вида:

$$a_0 \oplus \bigoplus_{1 \leq i \leq n} a_ix_i \oplus \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_ix_j \oplus \cdots \oplus a_{12\ldots n}x_1x_2\ldots x_n,$$

Теорема 6. Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин.

Задача 76. По метода на неопределените коефициенти, намерете полинома на Жегалкин на функцията а) $f(x, y) = x \vee y$;

б) $f(x, y, z) = x \vee y \vee z$;

в) $f(x, y, z) = x \to (y \to z)$;

г) $f(x, y, z) = x(y \vee \overline{z})$.

Док.

а)

$$\begin{aligned} a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0 &= 0 \vee 0 &= 0 \\ a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 0 \oplus a_3 0 &= 1 \vee 0 &= 1 \\ a_0 \oplus a_1 0 \oplus a_2 1 \oplus a_3 0 &= 0 \vee 1 &= 1 \\ a_0 \oplus a_1 1 \oplus a_2 1 \oplus a_3 1 &= 1 \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

Следователно, $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$.

□

Задача 77. Използвайки еквивалентности от вида $\overline{A} = A \oplus 1$ и $A \vee B = AB \oplus A \oplus B$, намерете полинома на Жегалкин на функцията:

а) $f(x, y) = x \to y$; $1 \oplus x \oplus xy$

б) $f(x, y, z) = (x \to (y \to z))$; $1 \oplus xy \oplus xyz$

в) $f(x, y, z) = ((x \to y) \to z)$; $x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

г) $f(x, y, z) = (x \to (y \to z)).((x \to y) \to z)$; $x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$

д) $f(x, y, z, t) = (x \to y) \to (z \to xt)$;

е) $f(x, y, z, t) = x \vee (y \to ((z \to y) \to t)$;

ж) $f(x, y, z, t) = (x \vee y \vee z)t \vee xyz$.

6.3 ДНФ

Нека е дадена булевата функция $f(x_1, \dots, x_n)$.

- Дизюнктивна нормална форма на f е формулата

$$\bigvee_{\substack{(\sigma_1 \dots \sigma_n) \in \{0,1\}^n \\ f(\sigma_1, \dots \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n},$$

  където $x_i^{\sigma_i} = x_i$, ако $\sigma_i = 1$ и $x_i^{\sigma_i} = \overline{x}_i$, ако $\sigma_i = 0$.

Задача 78. С помощта на еквивалентни преобразувания постройте ДНФ на булевите функции

а) $f(x, y, z) = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (xy \vee z)$; $xy\overline{z} \vee \overline{x}z \vee \overline{y}z$

б) $f(x, y, z) = (\overline{x}y \oplus z) \cdot (xz \to y)$; $\overline{x}y\overline{z} \vee xyz \vee x\overline{y}z$

в) $f(x, y, z) = (x \vee y\overline{z}) \cdot (x\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot (\overline{xy} \vee z)$;

г) $f(x,y,z,t) = (x \vee y\overline{z}.\overline{t})((\overline{x} \vee t) \oplus yz) \vee \overline{y} \cdot (z \vee \overline{x\overline{t}})$;

д) $f(x,y,z,t) = (x \to y).(y \to \overline{z}).(z \to x\overline{t})$;

Задача 79. По дадена ДНФ на булевата функция f постройте нейната СДНФ.

1) $f(x,y,z) = xy \vee \overline{z}$;

2) $f(x,y,z) = \overline{x}.\overline{y} \vee y\overline{z} \vee z\overline{z}$;

3) $f(x,y,z) = x \vee yz \vee \overline{x}.\overline{z}$;

4) $f(x,y,z) = x \vee \overline{y} \vee \overline{x}z$;

5) $f(x,y,z,t) = xy\overline{z} \vee xz\overline{t}$;

6) $f(x,y,z,t) = xy \vee \overline{y}t \vee z\overline{t}$.

Задача 80. Представете в СДНФ следните булеви функции:

1) $f(x,y,z) = (x \vee y) \to z$;

2) $f(x,y,z) = (01010001)$;

3) $f(x,y,z) = (11001010)$;

4) $f(x,y,z,t) = (x \to yzt)(z \to x\overline{y})$;

5) $f(x,y,z,t) = (x \oplus y)(z \to \overline{y}t)$;

6.4 Функции запазващи константите

Нека $c \in \{0,1\}$. Казваме, че булевата функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ запазва константата c, ако $f(c,c,\ldots,c) = c$. Означаваме с T_0 функциите, които запазват константата 0 и с T_1 тези, които запазват константата 1. С T_0^n и T_1^n означаваме тези функции, които са на n променливи и принадлежат на T_0 или T_1 съответно.

Задача 81. Принадлежи ли функцията f на множеството $T_1 \setminus T_0$?

а) $f = (x \to y)(y \to z)(z \to x)$; Да

б) $f = x \to (y \to (z \to x))$; Да

в) $f = xyz \vee \overline{x}y \vee \overline{y}$; Да

Задача 82. При какви n функцията $f(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежи на $T_0 \setminus T_1$?

1) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$;

2) $f = (\bigoplus_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}) \oplus x_n x_1$;

6.5 Самодвойнствени функции

- Нека е дадена булевата функция $f(x_1, \dots, x_n)$. Дефинираме булевата функция $f^\star(x_1, \dots, x_n)$ като
$$f^\star(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n).$$
- Ще наричаме $f^\star$ **двойнствена** функция на f.
- Ако $f = f^\star$, то ще наричаме f **самодвойнствена** функция.
- Ще означаваме с S множеството от всички самодвойнствени булеви функции, а с S^n тези на n променливи.

Задача 83. Проверете дали функцията g е двойнствена на f.

1) $f = x \to y$, $g = \overline{x}.y$; Да

2) $f = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$, $g = (x \to y).(\overline{y} \to \overline{x})$; Не

3) $f = x.y \to z$, $g = \overline{x}.\overline{y}.z$; Да

4) $f = (x \vee y \vee z).t \vee x.y.z$, $g = (x \vee y \vee z).t \vee x.y.z$;

5) $f = xy \vee yz \vee zt \vee tx$, $g = xz \vee yt$;

6) $f = (x \to y).(z \to t)$, $g = (x \to \overline{z}).(x \to t).(\overline{y} \to \overline{z}).(\overline{y} \to t)$.

Задача 84. Проверете самодвойнствена ли е f.

а) $f(x, y) = x \vee y$; Не

б) $f(x, y) = x \to y$; Не

в) $f(x, y) = x \oplus y$; Не

г) $f_4(x, y, z) = xy \vee yz \vee zx$; Да

д) $f_5(x, y, z) = x \oplus y \oplus z \oplus 1$; Да

е) $f_6(x, y, z) = xyz \oplus xy\overline{z} \oplus yz \oplus xz$. Да

ж) $f_7(x, y, z) = xyz \oplus xy \oplus yz \oplus xz$; Не

з) $f(x, y, z) = (x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (y \to x)$; Не

и) $f(x, y, z) = (x \to y) \oplus (y \to z) \oplus (z \to x) \oplus z$; Не

Док.

xz	а)	б)	в)
00	0	1	0
01	1	1	1
10	1	0	1
11	1	1	0

xyz	г)	д)	е)	ж)	з)
000	0	1	0	0	1
001	0	0	0	0	1
010	0	0	0	0	1
011	1	1	1	1	0
100	0	0	0	0	0
101	1	1	1	1	0
110	1	1	1	1	0
111	1	0	1	0	1

$\square$

Задача 85. Проверете дали функцията f е самодвойнствена, ако е зададена векторно:

1) $\alpha_f = (01001101)$; Да

2) $\alpha_f = (01100110)$; Не

3) $\alpha_f = (1100100101101100)$;

4) $\alpha_f = (1110011100011000)$;

5) $\alpha_f = (1100001100111100)$;

6) $\alpha_f = (1001011010010110)$;

7) $\alpha_f = (1100001110100101)$;

Задача 86. Заменете $-$ в χ_f с 0 или 1 за да получите характеристичен вектор на самодвойнствена функция.
а) $\chi_f = (1-0-)$; б) $\chi_f = (01-0-0--)$; в) $\chi_f = (--01--11)$;

6.6 Линейни функции

Всяка булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ с полином на Жегалкин от вида

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \cdots \oplus a_n x_n$$

наричаме *линейна*. Ще означаваме с L множеството от всички линейни булеви функции, а с L^n тези на n променливи.

Задача 87. Линейна ли е функцията f с характеристичен вектор $\chi_f = (1001011010010110)$?

Задача 88. Заменете $-$ в $\chi_f = (-110---0)$ с 0 или 1, така че да получите f линейна.

Задача 89. Проверете дали f е линейна функция.

1. $f = x \to y$; Не
2. $f = \overline{x \to y} \oplus \overline{x}y$; Да
3. $f = xy \vee \overline{x}.\overline{y} \vee z$; Не
4. $f = xy\overline{z} \vee x\overline{y}$; Не
5. $f = (x \vee yz) \oplus xyz$; Да
6. $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz$;
7. $\chi_f = (11000011)$;
8. $\chi_f = (1001011001101001)$;

Задача 90. Заменете $-$ в χ_f с 0 или 1, така че да получите f линейна.

а) $\chi_f = (10-1)$;

б) $\chi_f = (100-0---)$;

в) $\chi_f = (-001--1-)$;

г) $\chi_f = (11-0---1)$;

д) $\chi_f = (-0-1--00)$;

е) $\chi_f = (--10----0--1-110)$;

Док. а) (1001); б) $f = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$; в) $f = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$; г) $f = 1 \oplus x \oplus y$; д) $f = x \oplus y$; $\square$

6.7 Монотонни функции

Нека α и β са два бинарни вектора с равна дължина. Дефинираме релацията $\preceq$ между тях по следния начин.

$$\alpha \preceq \beta \ \leftrightarrow \ |\alpha| = |\beta| \wedge (\forall i \leq |\alpha|)[a_i \leq b_i].$$

Булевата фунция $f(x_1, \dots, x_n)$ наричаме *монотонна*, ако

$$(\forall \alpha, \beta \in J_2^n)[\alpha \preceq \beta \rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)].$$

Ще означаваме с M множеството от всички монотонни булеви функции, а с M^n тези на n променливи.

Задача 91. Проверете монотонни ли са функциите:

а) $f(x, y) = x \rightarrow (y \rightarrow x)$; Да

б) $f(x, y) = x \rightarrow (x \rightarrow y)$; Не

в) $f(x, y) = (x \oplus y)xy$; Да

г) $f(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx$; Да

д) $f(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx \oplus x$; Не

Задача 92. За немонотонните функции f, намерете съседни α, β, такива че $\alpha \prec \beta$ и $f(\alpha) > f(\beta)$.

а) $f = xyz \vee \overline{x}y$; Отг. $\alpha = (010)$, $\beta = (110)$

б) $f = x \oplus y \oplus z$; Отг. $\alpha = (010)$, $\beta = (110)$

в) $f = xy \oplus z$; Отг. $\alpha = (110)$, $\beta = (111)$

г) $f = x \vee y\overline{z}$; Отг. $\alpha = (010)$, $\beta = (011)$

д) $f = xz \oplus yt$; Отг. $\alpha = (0111)$, $\beta = (1111)$

е) $f(x, y, z, t) = (xyt \rightarrow yz) \oplus t$; Отг. $\alpha = (1110)$, $\beta = (1111)$

6.8 Пълнота и затворени класове

Теорема 7 (Критерий за пълнота на Пост-Яблонский)**.** Нека $P \subseteq F_2$. Множеството P е пълно тогава и само тогава, когато то *не* е подмножество на нито едно от множествата T_0, T_1, S, M, L.

Задача 93. Пълна ли е системата от функции?

1) $A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;

2) $A = \{1, xy(x \oplus z)\}$;

3) $A = \{x \to y, x \oplus y\}$;

4) $A = \{0, \overline{x}, x(y \oplus z) \oplus yz\}$;

5) $A = \{x \to y, \overline{x} \to \overline{y}x, x \oplus y \oplus z, 1\}$;

6) $A = \{\chi_{f_1} = (0110), \chi_{f_2} = (11000011), \chi_{f_3} = (10010110)\}$;

7) $A = \{\chi_{f_1} = (11), \chi_{f_2} = (00), \chi_{f_3} = (00110101)\}$;

Док.

1)

	T_0	T_1	L	S	M
xy	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x \vee y$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x \oplus y \oplus z \oplus 1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

2)

	T_0	T_1	L	S	M
1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$xy(x \oplus z)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$

3)

	T_0	T_1	L	S	M
$x \to y$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x \oplus y$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$

4)

	T_0	T_1	L	S	M
0	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$x \oplus y$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$x \to y$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$xy \sim xz$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

□

Задача 94. Проверете пълно ли е множеството от булеви функции:

а) $A = (S \cap M) \cup (L \setminus M)$;

б) $A = ((L \cap M) \setminus T_1) \cup (S \cap T_1)$.

в) $A = (L \cap M) \cup (S \setminus T_0)$;

г) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$;

д) $A = (M \setminus S) \cup (L \cap S)$;

е) $A = (M \setminus T_0) \cup (L \setminus S)$;

Задача 95. Проверете дали системата от функции A е базис?

а) $A = \{x \to y, x \oplus y, x \vee y\}$;

б) $A = \{x \oplus y \oplus z, x \vee y, 0, 1\}$;

в) $A = \{xy \oplus yz \oplus zx, 0, 1, x \vee y\}$;