Примерни решения на Домашно №2

Задача 1: Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Нека $S(n) = \{-n, -n+1, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Нека $P(X)$ и $Q(X)$ са предикати с домейн $2^{S(n)}$, дефинирани така:

- $P(X)$ е "X не съдържа последователни положителни числа", а
- $Q(X)$ е "X не съдържа двойка числа със сума 0".

Нека

$$T(n) = \{X \subseteq S(n) \,|\, P(X) \wedge Q(X)\}$$

Намерете $|T(n)|$ като първо съставите подходящо рекурентно уравнение и после решите това рекурентно уравнение.

Решение: Да видим как изглежда $T(n)$ за малки n.

- $S(1) = \{-1, 1\}$. $2^{S(1)} = \big\{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\}\big\}$. $T(1) = \big\{\emptyset, \{-1\}, \{1\}\big\}$, понеже $\neg Q(\{-1, 1\})$.
- $S(2) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

  $$\begin{aligned} 2^{S(2)} = \{&\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{-2,-1\}, \{-2,1\}, \{-2,2\}, \{-1,1\}, \{-1,2\}, \{1,2\}, \\ &\{-2,-1,1\}, \{-2,-1,2\}, \{-2,1,2\}, \{-2,-1,1\}, \{-2,-1,-1,2\}\big\} \end{aligned}$$

  Тогава $T(2) = \big\{\emptyset, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{-2,-1\}, \{-2,1\}, \{-1,2\}\big\}$.
- $S(3) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Тъй като $\left|2^{S(3)}\right| = 64$ е прекалено голямо за работа на ръка, ще генерираме $T(3)$ директно, а не чрез генериране на $2^{S(3)}$ и елиминиране на елементи. Празното множество и шестте едноелементни подмножества са в $T(3)$:

  $$\emptyset, \{-3\}, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\} \in T(3)$$

  Всички двуелементни подмножества с отрицателни елементи са в $T(3)$:

  $$\{-3,-2\}, \{-3,-1\}, \{-2,-1\} \in T(3)$$

  От двуелементните с един отрицателен и един положителен елемент, в $T(3)$ са тези:

  $$\{-3,1\}, \{-3,2\}, \{-2,1\}, \{-2,3\}, \{-1,2\}, \{-1,3\} \in T(3)$$

  От двуелементните с положителни елементи, само $\{1,3\}$ е в $T(3)$:

  $$\{1,3\} \in T(3)$$

  Разглеждаме триелементните. Очевидно

  $$\{-3,-2,-1\} \in T(3)$$

  От триелементните с два отрицателни елемента, в $T(3)$ са тези:

  $$\{-3,-2,1\}, \{-3,-1,2\}, \{-2,-1,3\} \in T(3)$$

  От триелементните с един отрицателен елемент, само $\{-2,1,3\}$ е в $T(3)$:

  $$\{-2,1,3\} \in T(3)$$

  Триелементни без отрицателни елементи в $T(3)$ няма. Четириелементни в $T(3)$ също няма, което влече, че няма и петелементни, и шестелементи. Тогава

  $$\begin{aligned} T(3) = \{&\emptyset, \{-3\}, \{-2\}, \{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{-3,-2\}, \{-3,-1\}, \{-2,-1\}, \{-3,1\}, \{-3,2\}, \\ &\{-2,1\}, \{-2,3\}, \{-1,2\}, \{-1,3\}, \{1,3\}, \{-3,-2,-1\}, \{-3,-2,1\}, \{-3,-1,2\}, \\ &\{-2,-1,3\}, \{-2,1,3\}\} \end{aligned}$$

И така, $|T(1)| = 3$, $|T(2)| = 8$ и $|T(3)| = 22$.

Да видим как $T(n+1)$ се получава от $T(n)$. Нека

$$\begin{aligned}
A(n+1) &= \{X \in T(n+1) \;:\; -n-1 \notin X \wedge n+1 \notin X\}\\
B(n+1) &= \{X \in T(n+1) \;:\; -n-1 \in X \wedge n+1 \notin X\}\\
C(n+1) &= \{X \in T(n+1) \;:\; -n-1 \notin X \wedge n+1 \in X\}\\
D(n+1) &= \{X \in T(n+1) \;:\; -n-1 \in X \wedge n+1 \in X\}
\end{aligned}$$

Очевидно $\big\{A(n+1), B(n+1), C(n+1), D(n+1)\big\}$ е разбиване на $T(n+1)$. Съгласно принципа на разбиването,

$$|T(n+1)| = |A(n+1)| + |B(n+1)| + |C(n+1)| + |D(n+1)|$$

Обаче $D(n+1) = \emptyset$, защото по условие не е разрешено да се съдържа елемент и неговото отрицание. Тогава

$$|T(n+1)| = |A(n+1)| + |B(n+1)| + |C(n+1)|$$

- Очевидно $|A(n+1)| = |T(n)|$, понеже $A(n+1) = T(n)$.
- $\forall X \in T(n) : X \cup \{\{-n-1\}\} \in B(n+1)$ и $\forall X \in B(n+1) : X \setminus \{\{-n-1\}\} \in T(n)$. Заключаваме, че има биекция между $T(n)$ и $B(n+1)$. Тогава $|B(n+1)| = |T(n)|$.
- Да намерим $|C(n+1)|$. Всяко множество в $C(n+1)$ **не** съдържа n заради изискването да няма съседни положителни елементи. Всяко множество в $C(n+1)$ не съдържа $-n-1$ по конструкция. Числото $-n$ обаче може да се съдържа в елементите на $C(n+1)$. Нека

  $$\begin{aligned}
  C^-(n+1) &= \{X \in C(n+1) \;:\; -n \in X\}\\
  C^+(n+1) &= \{X \in C(n+1) \;:\; -n \notin X\}
  \end{aligned}$$

  Очевидно $\{C^-(n+1), C^+(n+1)\}$ е разбиване на $C(n+1)$.

  - Всеки елемент на $C^-(n+1)$ съдържа $-n$, но не съдържа n. Очевидно съществува биекция между $C^-(n+1)$ и $T(n-1)$.
  - Всеки елемент на $C^+(n+1)$ не съдържа нито $-n$, нито n. Очевидно съществува биекция между $C^+(n+1)$ и $T(n-1)$.

  Както видяхме в примера горе, $C(2+1) = \big\{\{3\}, \{-2,3\}, \{-1,3\}, \{1,3\}, \{-2,-1,3\}, \{-2,1,3\}\big\}$, а $C^-(2+1) = \big\{\{-2,3\}, \{-2,-1,3\}, \{-2,1,3\}\big\}$ и $C^+(2+1) = \big\{\{3\}, \{-1,3\}, \{1,3\}\big\}$. Наистина има по една биекция между всяко от тях и $T(1) = \big\{\emptyset, \{-1\}, \{1\}\big\}$.

  Заключаваме, че $|C(n+1)| = 2|T(n-1)|$ за $n \geq 3$.

Тогава

$$|T(n)| = \begin{cases} 3, & \text{ако } n = 1,\\ 8, & \text{ако } n = 2,\\ 2|T(n-1)| + 2|T(n-2)|, & \text{ако } n \geq 3 \end{cases}$$

Решението е

$$|T(n)| = \Big((-1/3)\,\sqrt{3} + 1/2\Big)\Big(-\sqrt{3}+1\Big)^n + \Big((1/3)\,\sqrt{3} + 1/2\Big)\Big(1+\sqrt{3}\Big)^n$$

Бърза проверка с тази формула показва, че наистина $|T(1)| = 3$, $|T(2)| = 8$ и $|T(3)| = 22$. □

Задача 2: Даден е граф G. Докажете, че поне единият от G и $\overline{G}$ е свързан.

Решение: Да допуснем, че G не е свързан. Ще докажем, че $\overline{G}$ е свързан. Очевидно $|V(G)| \geq 2$. Разглеждаме произволни $u, v \in V(G)$. Следните две възможности са взаимно изключващи се и изчерпателни.

- u и v не са съседи в G. Тогава те са съседи в $\overline{G}$, така че $(u, v) \in E(\overline{G})$, така че има път между тях в $\overline{G}$.

- u и v са съседи в G. Тогава те са върхове от една и съща свързана компонента G_1 на G. Тъй като G не е свързан по конструкция, той има поне още една свързана компонента G_2. Нека x е произволен връх от G_2. В G, нито върховете u и x са съседи, нито върховете v и x са съседи. Тогава $(u, x) \in E(\overline{G})$ и $(v, x) \in E(\overline{G})$. Тогава в $\overline{G}$ съществува път между u и v, а именно пътят u, x, v.

Доказахме, че за произволни $u, v \in V(G)$ е вярно, че в $\overline{G}$ има път между тях. Но $V(G) = V(\overline{G})$ по дефиниция. Тогава за произволни $u, v \in V(\overline{G})$ е вярно, че в $\overline{G}$ има път между тях. Тогава $\overline{G}$ е свързан. $\square$

Задача 3: Нека $G = (V, E)$ е граф и $u \in V$. Докажете, че $\overline{G - u} = \overline{G} - u$.

Решение: За краткост дефинираме $V_u = V \setminus \{u\}$, $\mathcal{I}(u) = \{e \in E \,|\, u \in e\}$, $\boldsymbol{\mathcal{V}} = \{X \subseteq V \;:\; |X| = 2\}$, $\overline{E} = \boldsymbol{\mathcal{V}} \setminus E$, $\overline{\mathcal{I}}(u) = \{e \in \overline{E} \,|\, u \in e\}$ и $\boldsymbol{\mathcal{V}}_u = \{X \subseteq V_u \;:\; |X| = 2\}$. По определение,

$$\begin{aligned} G - u &= \big(V_u, E \setminus \mathcal{I}(u)\big) \\ \overline{G} &= \big(V, \overline{E}\big) \\ \overline{G - u} &= \big(V_u, \boldsymbol{\mathcal{V}}_u \setminus (E \setminus \mathcal{I}(u))\big) \\ \overline{G} - u &= \big(V_u, \overline{E} \setminus \overline{\mathcal{I}}(u)\big) \end{aligned}$$

За да докажем, че $\overline{G - u} = \overline{G} - u$, трябва да докажем, че

$$\big(V_u, \boldsymbol{\mathcal{V}}_u \setminus (E \setminus \mathcal{I}(u))\big) = \big(V_u, \overline{E} \setminus \overline{\mathcal{I}}(u)\big) \tag{1}$$

Съгласно изучаваното на лекции свойство на наредените двойки

$$(a, b) = (c, d) \;\leftrightarrow\; a = b \wedge c = d,$$

за да докажем (1), достатъчно е да докажем

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_u \setminus (E \setminus \mathcal{I}(u)) = \overline{E} \setminus \overline{\mathcal{I}}(u) \tag{2}$$

Първо забелязваме, че $\boldsymbol{\mathcal{V}}_u \setminus (E \setminus \mathcal{I}(u)) = \boldsymbol{\mathcal{V}}_u \setminus E$, понеже $\boldsymbol{\mathcal{V}}_u$ е множеството от двуелементните подмножества върхове, които не съдържат u, така че дали

- от $\boldsymbol{\mathcal{V}}_u$ няма да вземем тези двуелементни подмножество върхове, които са ребра в G, които не съдържат върха u, или
- от $\boldsymbol{\mathcal{V}}_u$ няма да вземем всички двуелементни подмножество върхове, които са ребра в G,

води до един и същи резултат. Тогава това, което се иска да докажем, е

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_u \setminus E = \overline{E} \setminus \overline{\mathcal{I}}(u) \tag{3}$$

Множеството вляво се състои от всички двуелементни подмножества върхове, които не съдържат u и не са ребра в G. Множеството вдясно се състои от всички двуелементни подмножества върхове, които не са ребра в G, без не-ребрата, които съдържат u. Очевидно това е едно и също множество. $\square$

Задача 4: Нека G е граф, който е изоморфен на своето допълнение $\overline{G}$. Докажете, че G има срязващ връх тогава и само тогава, когато G има връх от степен 1.

Решение: Граф, който е изоморфен на допълнението си, се нарича *самодопълнителен*, на английски *self complementary*. Нека G е самодопълнителен. Първо забелязваме, че G е свързан и $\overline{G}$ е свързан. Ето защо. От **Задача 2** знаем, че поне единият от G и $\overline{G}$ е свързан. Ако G не е свързан, то $\overline{G}$ задължително е свързан и тогава G и $\overline{G}$ не са изоморфни. С аналогичен аргумент показваме, че $\overline{G}$ също е свързан.

$\Rightarrow$ В едната посока на доказателството, нека G има връх u от степен 1. Нека реброто, инцидентно с u, е $e = (u, v)$. Ще докажем, че $d(v) \neq 1$. Да допуснем, че $d(v) = 1$. Тогава $G = (\{u, v\}, \{e\})$ или една от свързаните компоненти на G е $(\{u, v\}, \{e\})$. Но, както вече забелязахме, G е свързан, така че има само една свързана компонента. Тогава $G = (\{u, v\}, \{e\})$. Но този граф не е самодопълнителен, понеже допълнението му е $(\{u, v\}, \emptyset)$. Тогава $d(v) \neq 1$. Тогава $d(v) \geq 2$, така че v има поне още един съсед освен u. Тогава v е срязващ връх.

$\Leftarrow$ В другата посока на доказателството, нека G има срязващ връх u. Разглеждаме $G - u$ и $\overline{G - u}$. Щом u е срязващ връх, $G - u$ има k свързани компоненти $G_1, \ldots, G_k$ за някое $k \geq 2$. Тогава за всеки $x \in V(G_1)$ и всеки $y \in V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_k)$ е вярно, че x и y не са съседи в $G - u$. Тогава за всеки $x \in V(G_1)$ и всеки $y \in V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_k)$ е вярно, че x и y са съседи в $\overline{G - u}$.

За краткост на записа дефинираме, че *биклика* е пълен двуделен граф; за такъв на лекции използвахме означението "$K_{p,q}$". Току-що показахме, че $\overline{G - u}$ има покриваща биклика, като дяловете са, примерно, $V(G_1)$ и $V(G_2) \cup \cdots \cup V(G_k)$. Съгласно **Задача 3**, $\overline{G - u} = \overline{G} - u$. Тогава $\overline{G} - u$ има покриваща биклика. Тъй като G е самодопълнителен, G трябва да има връх v, такъв че $G - v$ има покриваща биклика. Нека покриващата биклика на $G - v$ е $K_{p,q}$ с дялове V' и V'', където $p = |V'|$ и $q = |V''|$. Очевидно $V' \cup V'' = V \setminus \{v\}$ и $V' \cap V'' = \emptyset$, така че $p + q = |V| - 1$.

$K_{p,q}$ е свързан граф, понеже е биклика: за всеки $x, y \in V' \cup V''$, ако x и y са от различни дялове, те са съседи по дефиниция, а ако са от един и същи дял, БОО от V', x е съсед на някой z от V'' и y е съсед на същия z, така че има път x, z, y между x и y.

Забелязваме, че $u \neq v$, защото $G - u$ не е свързан по конструкция, а $G - v$ е свързан, понеже има покриващ свързан граф $K_{p,q}$.

Нека w е връх на G, различен и от u, и от v (такъв съществува). Щом $w \neq v$, със сигурност $w \in V' \cup V''$. БОО, нека $w \in V'$.

Помним, че връх u е срязващ връх и свързаните компоненти на $G - u$ са $G_1, \ldots, G_k$. БОО, нека $w \in V(G_1)$. Ще докажем, че всеки връх s на $G - u$, различен и от w, и от v, е връх от V'.

- Да допуснем, че $s \notin V(G_1)$. Тогава в $G - u$ няма ребро (s, w), понеже s и w са от различни свързани компоненти на $G - u$. Но тогава в G също няма ребро (s, w), понеже изтриването на u не би засегнало това хипотетично ребро.

  Знаем, че V' и V'' са дяловете на покриваща биклика на на $G - v$. Ако s беше във V'', щеше да има ребро (s, w) в $G - v$, така че щеше да има ребро (s, w) и в G. Но, както вече видяхме, ребро (s, w) в G няма. Ерго, $s \notin V''$.

  Тогава $s \in V'$. Заключаваме, че всеки връх на $G - u$, който не е в G_1 (където е w) и е различен от v, се намира във V'.

- Да допуснем, че $s \in V(G_1)$. Разглеждаме произволен връх t от $G - u$, който не е в G_1.

  В $G - u$ няма ребро (s, t), понеже s и t са върхове от различни свързани компоненти на $G - u$. Очевидно нито един от s и t не е връх u, така че в G също няма ребро (s, t).

  Но тогава в $G - v$ също няма ребро (s, t): такова не може да се появи с изтриването на връх v. Ерго, s и t са върхове от един и същи дял измежду V' и V''. Но t не може да се намира във V''; ако t беше във V'', щеше да има ребро (w, t), понеже $K_{p,q}$ е покриваща биклика. Ребро (w, t) обаче няма, понеже w е връх в G_1, а t е връх от друга свързана компонента. Щом t не е във V'', трябва t да е във V'. Но тогава и s е във V'.

Доказахме, че всеки връх на $G - u$, който не е нито w, нито v, се намира във V'. По допускане, $w \in V'$, така че $w \notin V''$. По конструкция, $v \notin V''$. Но V'' е непразно. Единственият връх на $G - v$, който може да бъде във V'', е връх u. Заключаваме, че $V'' = \{u\}$, а $V' = V \setminus \{u, v\}$.

Но тогава u е съсед на всеки връх от V', понеже V' и V'' са дяловете на биклика. Тогава степента на u в G е поне $n - 2$. Тогава степента на u в $\overline{G}$ е най-много 1. Забележете, че тя не може да е 0, понеже тогава $\overline{G}$ би имал изолиран връх и не би бил свързан, а, както вече видяхме, $\overline{G}$ е свързан. Тогава степента на u в $\overline{G}$ е точно 1. Тъй като G е самодопълнителен, в G също има връх от степен 1, и неговият съсед е срязващ връх. Което и трябваше да покажем. $\square$

Задача 5: На лекции доказахме, че граф е двуделен тстк няма нечетни цикли. Тук се иска да докажете по-слабо твърдение:

Ако граф няма нечетни цикли, то той е двуделен.

но с доказателство **по индукция**.

10 т. • Докажете твърдението с индукция по броя на ребрата.

10 т. • Докажете твърдението с индукция по броя на върховете.

Решение: Ето доказателство с индукция по броя на ребрата m. Базовият случай е $m = 0$. Графът с нула ребра няма цикли, в частност няма нечетни цикли, и наистина е двуделен – всяко разбиване на множеството от върховете на два дяла генерира двуделен граф.

Да допуснем, че за произволно $m \geq 0$, всеки граф без нечетни цикли с m ребра е двуделен. Разглеждаме произволен граф $G = (V, E)$ без нечетни цикли с $m + 1$ ребра. Нека $e = (u, v)$ е произволно ребро в G. Изтриваме e от G, получавайки граф G' с m ребра и без нечетни цикли – изтриването на ребро не може да доведе до появата на нечетен цикъл. Очевидно $V(G') = V$. Да кажем, че $E(G') = E'$; очевидно $E' = E \setminus \{e\}$.

Съгласно индуктивното допускане, G' е двуделен. Нека дяловете са V_1 и V_2. По дефиниция, за всяко ребро от E', единият край е от V_1, а другият от V_2. Ще докажем, че G също е двуделен.

- Да допуснем, че e е мост в G. Тогава, по дефиниция, G' има една свързана компонента повече от G, като u и v, които са в една и съща свързана компонента H на G, се оказват в различни свързани компоненти на G'. Да кажем, че в G', връх u принадлежи на свързаната компонента G_u, а връх v принадлежи на свързаната компонента G_v. Очевидно $G_u \cup G_v$, плюс реброто e, е H.

  Ако $u \in V_1$ и $v \in V_2$ или $u \in V_2$ и $v \in V_1$, то G очевидно е двуделен, защото за всяко ребро от E, включително и e, единият край е от V_1, а другият от V_2.

  Да допуснем, че и u, и v са от единия дял на G'. БОО, нека $u, v \in V_1$. Тогава "преместваме" всеки връх x от G_v в другия дял измежду V_1 и V_2: ако $x \in V_1$, слагаме x във V_2, а ако $x \in V_2$, слагаме x във V_1. Тези премествания променят дяловете. Нека новите дялове се казват U_1 и U_2. Очевидно $U_1 \cup U_2 = V$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, така че U_1 и U_2 са разбиване на V. Също така е очевидно, че за всяко ребро на G, единият край е в U_1, а другият, в U_2. Ерго, G е двуделен.

- Да допуснем, че e не е мост в G. Тогава e е ребро от поне един цикъл c в G, защото ребро е мост тстк е ребро от един или повече цикли. Цикълът c е четен по конструкция – в G нечетни цикли няма.

  Да кажем, че множеството от ребрата на c е $E(c)$, като очевидно $e \in E(c)$. След изтриването на e, цикълът c се превръща в път p с нечетна дължина, като u и v са краищата на p. Но p е път в G', а G' е двуделен от индуктивното допускане. Тогава за всяко ребро на p, единият край е във V_1, а другият край е във V_2. Освен това, единият от u и v е във V_1, а другият е във V_2 – това следва веднага от факта, че $|p|$ е нечетно число. Щом u и v са в различни дялове, добавянето на реброто e към G' не "разваля" двуделността с дялове V_1 и V_2, така че и G е двуделен.

Ето доказателство със силна индукция по броя на върховете n. Базовият случай е $n = 1$. Графът с един връх няма ребра, поради което няма цикли, поради което няма нечетни цикли, и наистина е двуделен – всяко разбиване на множеството от върховете на два дяла генерира двуделен граф.

Да допуснем, че за произволно $n \geq 1$, всеки граф без нечетни цикли с не повече от n върхове е двуделен. Разглеждаме произволен граф $G = (V, E)$ без нечетни цикли с $n + 1$ върхове. Нека u е произволен връх в G. Изтриваме u от G, получавайки свързани компоненти $G_1, \ldots, G_k$ за някое $k \geq 1$. Всяка от тези свързани компоненти има не повече от n върхове и няма нечетни цикли, така че, съгласно индуктивното предположение, е двуделен граф. Да кажем, че дяловете на G_i са X_i и Y_i, за $1 \leq i \leq k$.

Ще докажем, че за всяко G_i, в G има ребра между u и върхове от **само единия** дял на G_i. Да допуснем противното. БОО, нека съществува връх $a \in X_1$ и връх $b \in Y_1$, такива че $(u, a) \in E$ и $(u, b) \in E$. Но G_1 е свързан граф по конструкция. Тогава в G_1 съществува p път с краища a и b. Ключовото наблюдение е, че $|p|$ е нечетно число, понеже G_1 е двуделен: във всеки двуделен граф с фиксирани дялове, всеки път, чиито краища са от различни дялове, има нечетна дължина, защото, по продължение на пътя, върховете се редуват по отношение на принадлежността си към дяловете. И така, p е път с нечетна дължина. Пътят p заедно с ребрата (u, a) и (u, b) образува нечетен цикъл в G, а по конструкция G няма нечетни цикли.

И така, за всяко G_i, в G има ребра между u и върхове от **само единия** дял на G_i. БОО, нека X_i е дялът на G_i, който съдържа върховете, които са съседи на u в G. Тогава $A = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$ и $B = \{u\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} Y_i$ представляват разбиване на V, такова че за всяко ребро на G, единият край е в A, а другият край е в B. Тогава G е двуделен граф. $\square$