

Лекция 4: Функции

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

16 февруари 2025 г.

Определение 1 (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определение 2 (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \left((\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \right. \\ \left. ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z))) \right)$$

Или по-просто

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \forall w, z \in Y ((x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z)$$

Определение (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

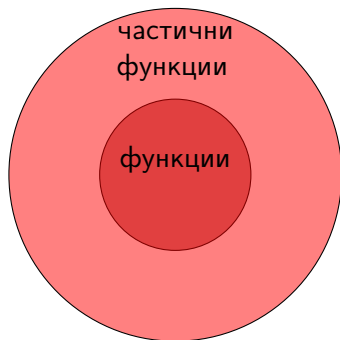
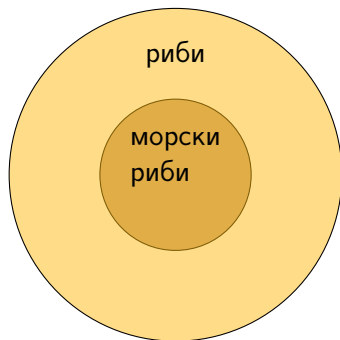
$$\forall x \in X \left((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z) \right)$$

Частични функции и функции

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само “функция” е “тотална функция”. При дадени X и Y , очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само “функция” е частен случай на “частична функция”: всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.

Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.

Частични функции и функции (2)



За формалните определения

На практика често казваме “изображение” (mapping) вместо “функция”. Това обаче не е определение: а какво е “изображение”?

Предпочитаме да не въвеждаме “функция” като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме “функция” чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

Типични записи на функции

Наместо $f \subseteq X \times Y$, пишем $f : X \rightarrow Y$. Чете се “ f е функция с домейн X и кодомейн Y ”. Още може да се чете и като “ f изобразява X в Y ”.

Наместо $(x, y) \in f$ или инфиксния запис $x f y$, в контекста на функциите ползваме добре известния запис $f(x) = y$. x е *променлива*. Променлива е нещо като кутийка, в която можем да слагаме неща (от домейна).

Ако $X' \subseteq X$, записът “ $f(X')$ ” означава $\{y \in Y \mid (\exists x \in X' : f(x) = y)\}$.

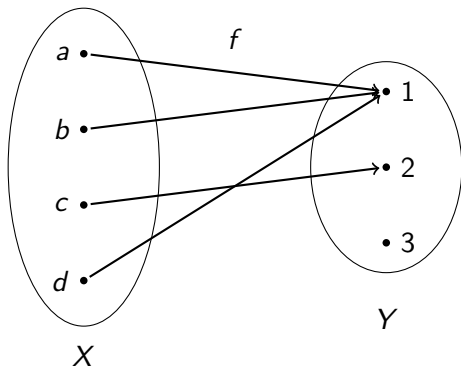
Свикнали сме да мислим за функциите на много променливи като за обобщение на функциите на една променлива. Но всяка функция на k променливи в някакъв смисъл е функция на една променлива, която обаче е наредена k -орка.

Пример: някаква реална функция на две променливи. Типичен запис е $g(x, y) = z$, където x , y и z са реални. Тогава $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Можем да мислим за g като функция на една променлива, която не е реално число, а наредена двойка от реални числа. Формално правилният запис би бил $g((x, y)) = z$, където $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но това не се ползва.

Забележка: множеството от реалните числа се бележи с $\mathbb{R}$.

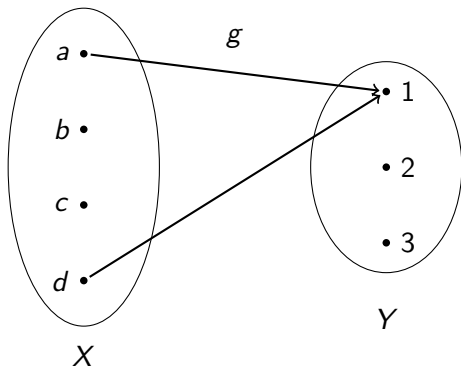
Представяне на функция с диаграма

Нека $f : X \rightarrow Y$, като X и Y са крайни. Да кажем,
 $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. От всяка точка в елипсата,
отговаряща на X , излиза точно една стрелка.



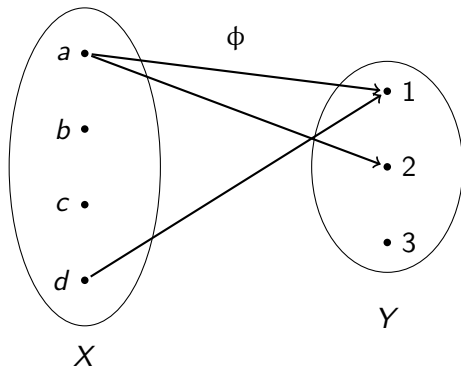
Представяне на частична функция с диаграма

Нека g е частична функция с домейн X и кодомейн Y . От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза не повече от една стрелка.



Диаграма на релация, която не е частична функция

Ако от поне една точка в елипсата, отговаряща на X , излиза повече от една стрелка, това не може да е диаграма на частична функция (оттам, и на тотална). Това е диаграма на релация ϕ с първи домейн X и втори домейн Y .

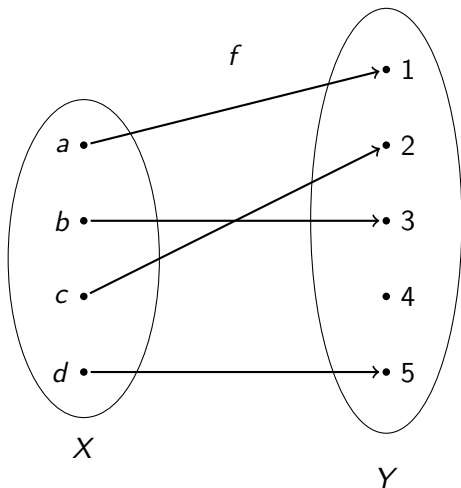


Инъекции, сюръекции, биекции

Инъекции

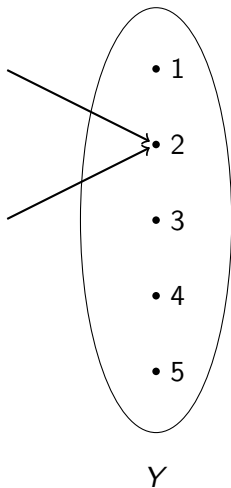
Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *инекция*, ако

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2.$$



Инекции, сюрекции, биекции

Контрапример за инекция

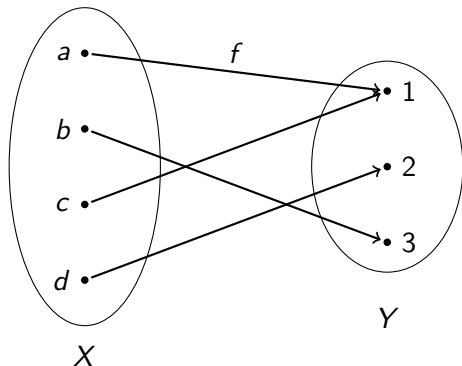


Инекции, сюрекции, биекции

Сюрекции

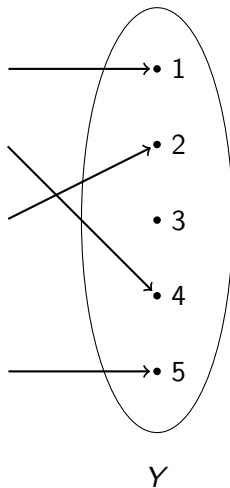
Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *сюрекция*, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

Неформално: кодомейнът да бъде “покрит” от изображението.



Инъекции, сюръекции, биекции

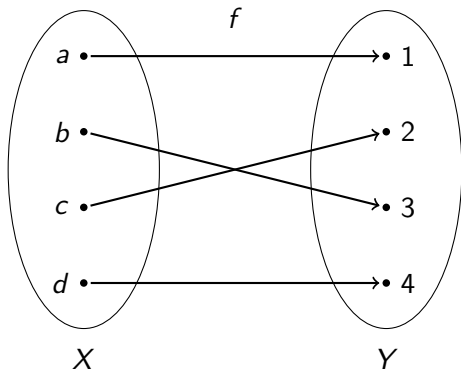
Контрапример за сюръекция



Инекции, сюрекции, биекции

Биекции

Нека $f : X \rightarrow Y$. f е биекция, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.



Инекции, сюрекции, биекции – пример

Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако няма правостоящи, сядането е функция.

Ако на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове, сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Инекции, сюрекции, биекции – ограничения за бройките

Все още не сме въвели формално “крайно множество” и “брой на елементи на крайно множество”, но интуитивно всеки разбира за какво става дума.

Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Нека $f : X \rightarrow Y$.

Необходимо условие f да е инекция е $m \leq n$. Необходимо условие f да е сюрекция е $m \geq n$. Необходимо условие f да е биекция е $m = n$.

Иначе казано, при $m > n$ няма инекция, при $m < n$ няма сюрекция, при $m \neq n$ няма биекция.

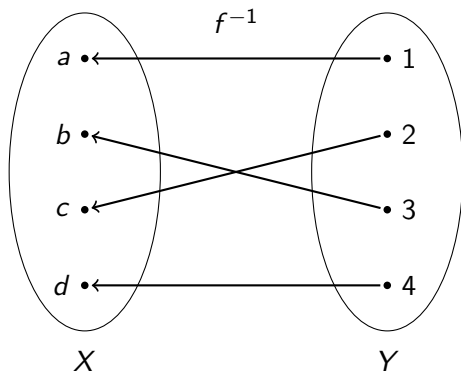
Обратна функция на биекция

Нека $f : X \rightarrow Y$ е биекция. Обратната функция на f се бележи с f^{-1} . Тя е с домейн Y и кодомейн X и се дефинира така:

$$\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x, \text{ където } x \text{ е уникалният елемент на } X, \\ \text{такъв че } f(x) = y$$

Обратна функция на биекция – пример

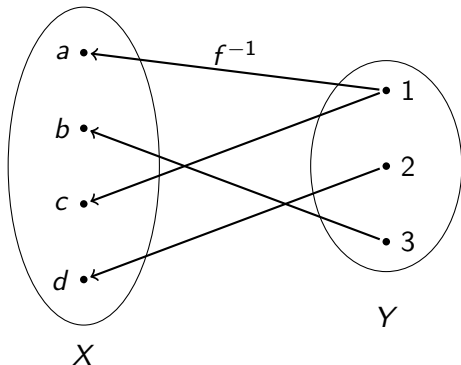
Нека f е биекцията от слайд 17. Нейната обратна функция е следната:



Обратна функция на функция

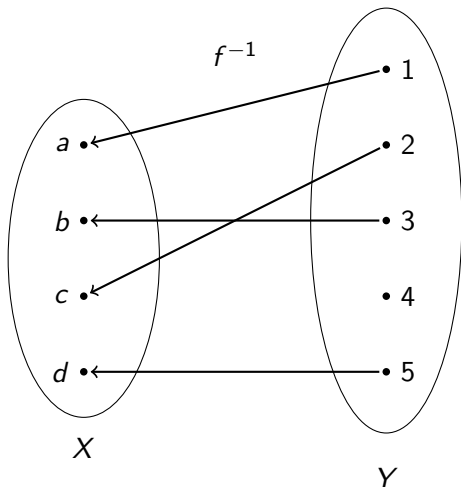
Образно казано, обратната функция има диаграма с разменени домейн и кодомейн и обърнати посоки на стрелките.

Ако опитаме да “обърнем” функция, която не е инекция, ще получим обект, който дори не е **функция**. Ето какво ще получим, ако се опитаме да “обърнем” сюрекцията от слайд 15:



Обратна функция на функция (2)

Ако обърнем произволна инекция, ще получим частична функция, която не е непременно функция. Ето какво ще получим, ако се опитаме да “обърнем” инекцията от слайд 13:



Рестрикция на функция

Нека $f : X \rightarrow Y$ и $X' \subseteq X$. Рестрикцията на f върху X' е $f' : X' \rightarrow Y$, където $\forall x \in X' : f'(x) = f(x)$. Бележим рестрикцията така: $f|_{X'}$.

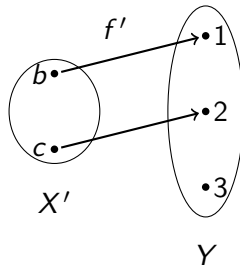
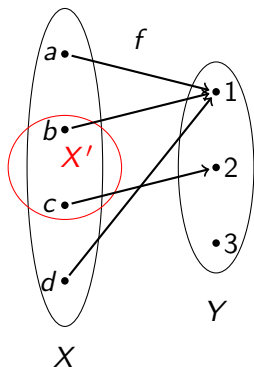
Алтернативна дефиниция е: $f|_{X'} = \{(x, y) \in f \mid x \in X'\}$.

Понятието “рестрикция” може да се обобщи и за частични функции по естествения начин.

Очевидно, всяка частична функция има рестрикция, която е функция – вземаме такова X' , че всеки елемент от X' да има изображение. Това е в сила дори ако $f = \emptyset$; забележете, че $f|_{\emptyset}$ е винаги функция, независимо от това дали $f = \emptyset$ или $f \neq \emptyset$.

Пример за рестрикция на функция

Нека $f : X \rightarrow Y$ е следната функция (това е функцията от слайд 10). Ако $X' = \{b, c\}$, то рестрикцията $f' = f|_{X'}$ е тази:



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Реална функция е всяка функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Нека е дадено уравнение на две реални променливи x и y .

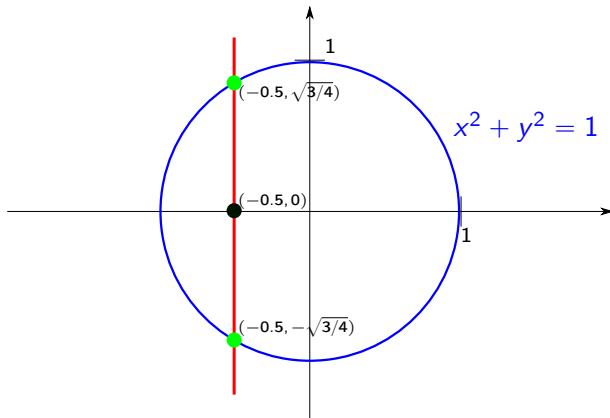
Дали то реализира частична функция $f(x) = y$? Да, ако и само ако издържа теста с вертикалната права. Мислено “влачим” вертикална права върху графиката:

- ако поне на едно място вертикалната права пресича графиката в повече от една точка, f не е дори частична функция,
- ако вертикалната права винаги пресича графиката в точно една точка, f е функция,
- ако вертикалната права винаги пресича графиката в не повече от една точка, f е частична функция.

Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: пример за не-функция

Примерно, $x^2 + y^2 = 1$ не задава функция и съответно не издържа теста с вертикалната права. Дори не е частична функция!



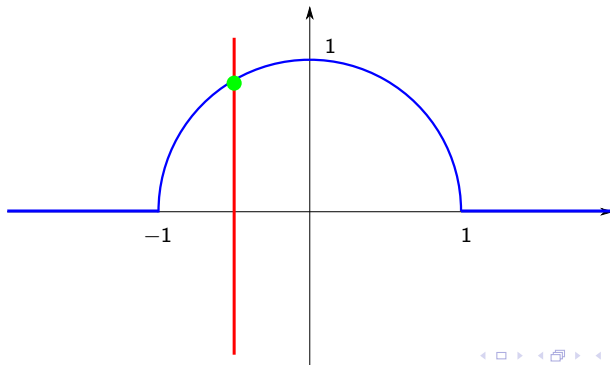
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: пример за функция

От друга страна,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x < -1 \text{ или } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{ако } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

е функция (което означава, че е и частична функция).



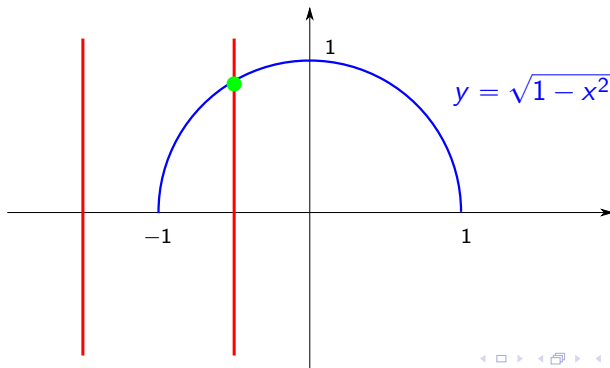
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: пример за частична функция

От трета страна,

$$f(x) = \begin{cases} \text{недефинирана,} & \text{ако } x < -1 \text{ или } x > 1 \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{ако } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

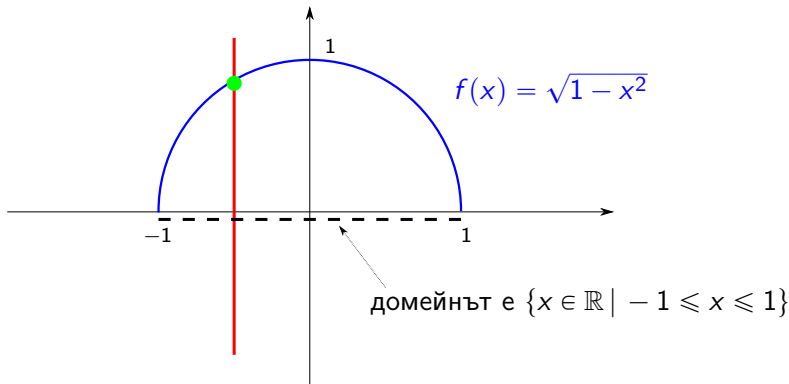
е частична функция, но не е функция.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с вертикалната права: друг пример за функция

От четвърта страна, ако $f : \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, то f е функция, но не е реална функция по нашата дефиниция, понеже домейнът не е множеството от всички реални числа.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: инекции и не-инекции, сюрекции и не-сюрекции

Нека е дадена функция f със своята графика. Мислено “влачим” хоризонтална права върху графиката. f е инекция тстк правата не пресича никъде повече от една точка от графиката. f е сюрекция тстк правата навсякъде пресича поне една точка от графиката. Тогава f е биекция тстк правата навсякъде пресича точно една точка от графиката.

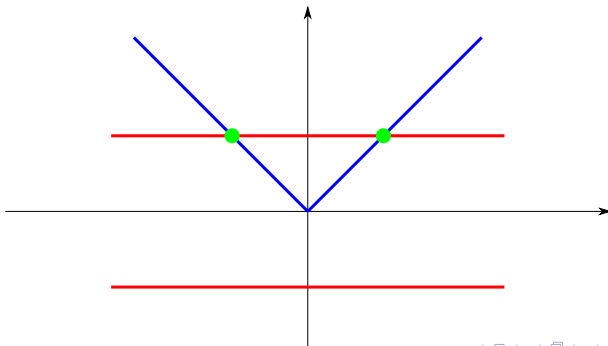
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: не-инекция и не-сюрекция

Нека f е реална функция, такава че

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ 0, & \text{ако } x = 0 \\ x, & \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

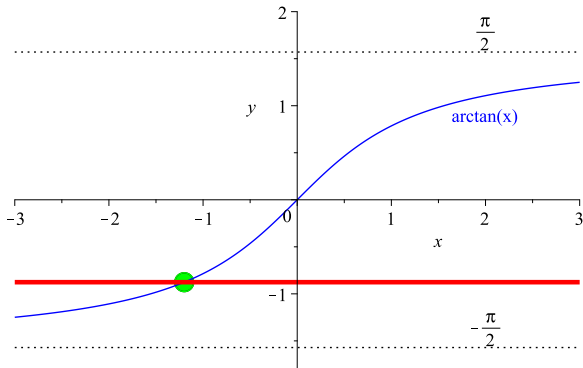
f не е нито е инекция, нито сюрекция.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: инекция, но не-сюрекция

Реалната функция $\arctan(x)$ “издържа” теста с хоризонталната права, така че е инекция, но не е сюрекция.



Графиката е генерирана с *Maple(tm)*.

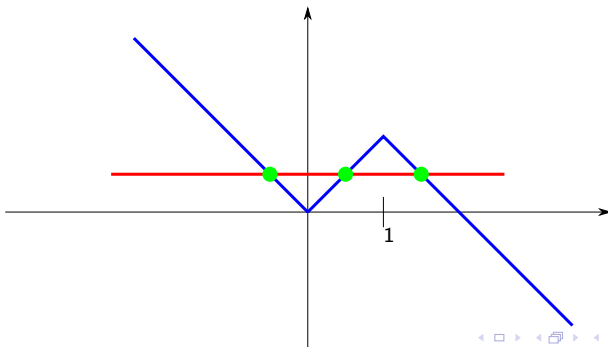
Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: сюрекция, но не-инекция

Нека f е следната реална функция.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ако } x < 0 \\ x, & \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ако } x > 1 \end{cases}$$

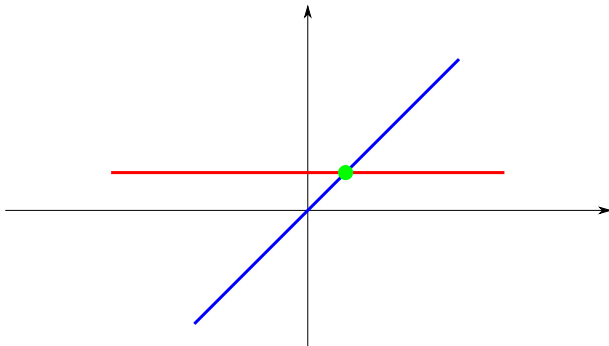
f е сюрекция, но не е инекция.



Илюстрации на понятията с реални функции и графики

Тестът с хоризонталната права: инекция и сюрекция

Реалната функция $f(x) = x$ е инекция и сюрекция; тоест, биекция.



Крайни множества

Неправилна дефиниция

Дефиницията “множество е крайно, ако има краен брой елементи” **не върши работа**. На практика тя казва “множество е крайно, ако е крайно”. Очевидно това е порочно зациклена дефиниция!

Крайни множества и кардиналност

Правилна дефиниция

Дефинирането на “крайно множество” става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \dots, n\}$.

Определение 3 (крайно множество, кардиналност)

Множество A е крайно, ако

- *или $A = \emptyset$, в който случай кардиналността на A е 0,*
- *или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$; тогава кардиналността на A е n .*

Кардиналността на A е броят на елементите и се бележи с $|A|$. “Мощност на множество” е синоним на “кардиналност на множество”. Множества са *равномощни*, или *съизброими*, тстк между тях съществува биекция. На английски се ползва “equinumerous”.

Определение 4 (безкрайно множество)

Множество е безкрайно, ако не е крайно.

Очевидно $\mathbb{N}$ не е крайно: колкото и голямо естествено число n да вземем, $n + 1$ е по-голямо. Така че за всяко n е вярно, че $n + 1 \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

Определение 5 (изброимо безкрайно множество)

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.

Определение 6 (изброимо множество)

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно.

Определение 7 (неизброимо множество)

Множество е неизброимо, ако не е изброимо.

Очевидно всяко неизброимо множество е безкрайно. Не е очевидно, че съществуват неизброими множества.

За безкрайните множества (1)

Потенциална и актуална безкрайност

Естествените числа се генерират от процес, който започва от 0 с добавяне на единица:

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 2$$

...

$$1\,000\,000 + 1 = 1\,000\,001$$

...

Аристотел характеризира този процес като “потенциална безкрайност”. Кулминацията на процеса, а именно множеството от всички естествени числа, е “пълна безкрайност”, или “актуална безкрайност”.

За безкрайните множества (2)

Потенциална и актуална безкрайност

От Аристотелово време чак до 19 век мнозинството от мислителите отхвърлят актуалната безкрайност като нелегитимно понятие. Гаус (Carl Friedrich Gauss), най-великият математик на своето време, пише:

But concerning your proof, I protest above all against the use of an infinite quantity as a *completed* one, which in mathematics is never allowed. The infinite is only *façon de parler*, in which one properly speaks of limits.

Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite,
Dauben, pp. 120

За безкрайните множества (3)

Потенциална и актуална безкрайност – допълнителна илюстрация на разликата

Редът на Лайбниц е

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Ако гледаме на сумата вдясно като на процес, който апроксимира $\frac{\pi}{4}$ все по-добре с добавяне на все повече събираеми, имаме предвид потенциална безкрайност. Тогава $\frac{\pi}{4}$ е само граница, по израза на Гаус, към която клони сумата, без да я достига никога. Тук и дума не става за пълна безкрайност: на всеки етап от сумирането сме събрали краен брой събираеми.

Ако гледаме на сумата вдясно като на едно цяло нещо, което е точно равно на $\frac{\pi}{4}$, имаме предвид актуална безкрайност.

За безкрайните множества (4)

Проблем при безкрайните множества: цялото е “равно” на своя част. “Равно” има смисъл на “равномощно”.

Примерно, множеството на естествените числа и множеството на четните числа $\mathbb{N}_e = \{0, 2, \dots\}$ са равномощни. Интуитивно, естествените са повече, защото има естествени нечетни числа. От друга страна, биекцията $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2, \dots\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = 2n$$

съчетава точно естествените и четните числа.

Оттук и мнението, че да се говори за “броя на всички числа” е безсмислица.

За безкрайните множества (5)

Георг Кантор (Georg Cantor) е първият математик, който разглежда сериозно безкрайните множества и създава кохерентна и задълбочена теория за тях. Той въвежда понятия, имащи смисъл на бройки на елементите на безкрайни множества, и работи с тези понятия.

Кантор показва, че множества като $\mathbb{Q}$ (рационалните числа) или множеството на алгебричните ирационални числа (като $\sqrt{2}$), които в днешната терминология са строги надмножества на $\mathbb{N}$, са равномощни с $\mathbb{N}$. След това показва, че $\mathbb{R}$ не е равномощно на $\mathbb{N}$.

За безкрайните множества (6)

Основен резултат на Кантор е, че има различни видове безкрайност. И естествените, и реалните числа са безброй много, но реалните са повече в смисъл, че няма биекция между тях и естествените.

Очевидно изброими безкрайни множества

$\mathbb{N}^+$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}^+ : f(n) = n - 1$.

$\mathbb{N}_e = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е четно}\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : \mathbb{N}_e \rightarrow \mathbb{N}$, където $\forall n \in \mathbb{N}_e : f(n) = \frac{n}{2}$.

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ е точна степен на } 2\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме $f : M \rightarrow \mathbb{N}$, където $\forall n \in M : f(n) = \log_2 n$.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ е изброимо. Примерно, разглеждаме

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ където } \forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ 2n - 1, & \text{ако } n > 0, \\ -2n, & \text{ако } n < 0. \end{cases}$$

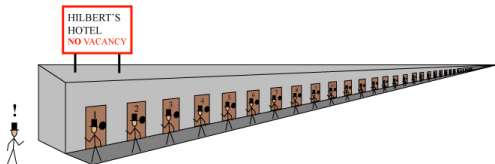
Изброяването е $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 4$, $f(3) = 5$, $f(-3) = 6$ и т. н. Ето наредбата:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots$$

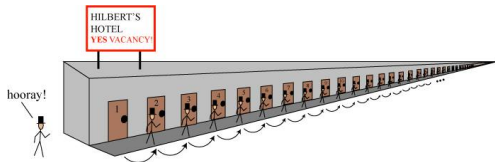
Безкрайността е КОНТРАИНТУИТИВНА

Хотелът на Hilbert

Хотел с безкрайно много стаи, номерирани с 1, 2, 3 и така нататък. Във всяка стая има гост.



Може ли хотелът да приюти нов гост? Колкото и да е контраинтуитивно, да: преместваме всеки от вече настанените в следващата стая.



Графиките са взети от Интернет от сайт без лицензи.

Теорема 1

Съществува биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Доказателство: Твърди се, че има начин да бъдат изброени наредените двойки от естествени числа.

Разбиваме множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ на подмножества $S_0, S_1, S_2, \dots$ по следния начин

$$\forall k \in \mathbb{N} : S_k = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = k\}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (2)

Изброяването е следното: при $i < j$, наредените двойки от S_i преди наредените двойки от S_j , а вътре във всяко S_i нареждаме двойките по нарастващ втори елемент:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) & (2,0) & (1,1) & (0,2) & (3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) & \dots \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{S_0} & \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{S_1} & & \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{S_2} & & & \underbrace{\hspace{3.5cm}}_{S_3} & & & & \end{array}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (3)

Да си представим наредените двойки (a, b) от естествени числа в безкрайна таблица.

(a, b)		b						
a		0	1	2	3	4	5	6
	0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)
	1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	.	.	.	.	.	.	.
	6	.	.	.	.	.	.	.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (4)

Да групираме наредените двойки по диагонали. Тогава $diag_i$ съдържа точно елементите на S_i .

(a,b) b

a 0 1 2 3 4 5 6

0 (0,0) (0,1) (0,2) (0,3) (0,4) (0,5) (0,6) ...

1 (1,0) (1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) ...

2 (2,0) (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) ...

3 (3,0) (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) ...

4 (4,0) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6) ...

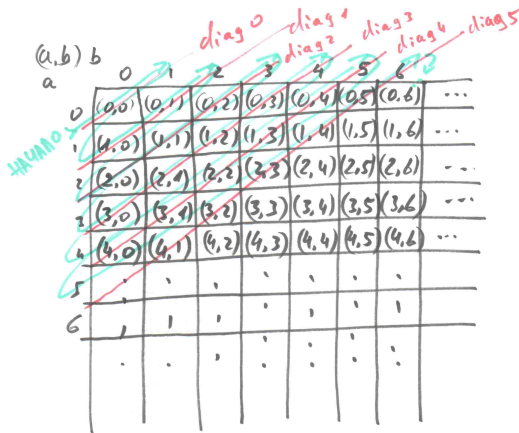
5

6

diag 0 diag 1 diag 2 diag 3 diag 4 diag 5

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (5)

Ето визуализация на изброяването



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (6)

Функцията на изброяването f

Да разгледаме следната функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f((a, b)) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a, b) = (0, 0) \\ \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

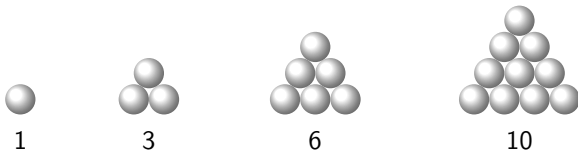
Това е **формалното** описание на функцията на изброяването, която въведохме на слайд 49 и илюстрирахме на слайд 52.

Ще докажем, че f е биекция.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (7)

Пояснения към функцията на изброяването (1)

Числата от вида $\frac{k(k+1)}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$ се наричат *триъгълните числа*. В нарастващ ред на k , редицата от триъгълните числа започва така: 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Следната визуализация за $k > 0$ показва защо се наричат триъгълните числа .



Лесно се вижда, че триъгълните числа са точно сумите $\sum_{i=0}^k i$, за $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (8)

Пояснения към функцията на изброяването (2)

В израза $\boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b}$, събираемото $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е точно броят на наредените двойки във всички диагонали преди диагонал номер $a + b$. То е триъгълното число

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (a+b)$$

Събираемото b е броят на елементите преди (a, b) в диагонал номер $a + b$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (9)

f е инекция (1)

Да допуснем, че f не е инекция. Тогава съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Нека $a_1 + b_1 = m_1$ и $a_2 + b_2 = m_2$.

Случай 1: $m_1 \neq m_2$. БОО, нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа, като $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Ще докажем, че $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Наистина,

$$\frac{m_1(m_1 + 1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2 + 1)}{2} \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2} (m_2^2 + m_2 - m_1^2 - m_1) \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2} ((m_2 - m_1)(m_2 + m_1) + (m_2 - m_1)) \leftrightarrow$$

$$b_1 < \frac{1}{2} (m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (10)

f е инекция (2)

Но $m_2 - m_1 \geq 1$, понеже $m_2 > m_1$ по допускане. Да разгледаме множителя $m_2 + m_1 + 1$. Но това е $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1$.

Очевидно $a_2 + b_2 > b_1$ в текущите допускания, а също така $b_1 + 1 > b_1$. Тогава $a_2 + b_2 + a_1 + b_1 + 1 > 2b_1$. Тогава

$$\frac{1}{2}(\underbrace{m_2 - m_1}_{\geq 1})(\underbrace{m_2 + m_1 + 1}_{> 2b_1}) > b_1.$$

Доказахме, че $b_1 < \frac{1}{2}(m_2 - m_1)(m_2 + m_1 + 1)$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 = f(a_1, b_1)$, а $\frac{m_2(m_2+1)}{2} \leq f(a_2, b_2)$. Показахме, че $f(a_1, b_1) < f(a_2, b_2)$.

Заклучаваме, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$, е погрешно в **Случай 1**. ⚡

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (11)

f е инекция (3)

Случай 2: $m_1 = m_2$. Тогава трябва b_1 да е различно от b_2 , иначе $a_1 = a_2$, което влече $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Щом $b_1 \neq b_2$ и $m_1 = m_2$, то $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$. С други думи, $f(a_1, b_1) \neq f(a_2, b_2)$. Заклучаваме, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$, е погрешно в **Случай 2**. ⚡

Тъй като **Случай 1** и **Случай 2** са изчерпателни, заключаваме, че допускането, че $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$ за някои естествени a_1, b_1, a_2 и b_2 , е погрешно. ⚡

Заклучаваме, че f е инекция.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (12)

f е сюрекция

Щом f е инекция, обратното $\dot{\iota}$ изображение е дефинирано и то е частична функция. Очевидно следният алгоритъм реализира въпросното обратно изображение. Това, че всяко естествено число е образ на някоя наредена двойка по отношение на изображението f доказва, че f е сюрекция (обратното изображение е **тотална** функция).

```
if (n == 0) {a = 0; b = 0;}  
else {c = 1;  
      while (c <= n) {n = n - c; c ++;}  
      a = c - 1 - n; b = n;}  
return (a, b);
```

Множеството от рационалните числа е изброимо (1)

Кои са рационалните числа

Определение

Множеството от рационалните числа е

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Забелязваме, че (изброимо безкрайно) множество обикновени дроби $\frac{p}{q}$ съответстват на едно и също число; примерно $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{-2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1000001}{2000002}$ и така нататък съответстват на, или представляват, едно и също число. И така, рационалните числа нямат уникално представяне чрез обикновени дроби. Може да въведем релация на еквивалентност (каква?) върху множеството от дробите и да кажем, че нейните класове на еквивалентност са рационалните числа.

Множеството от рационалните числа е изброимо (2)

Контраинтуитивно, рационалните числа са изброими

Да кажем, че $\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$. Лесно следствие на Теорема 1 е това:

Следствие 1

Съществува биекция $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}$.

Забелязваме, че рационалните числа може да се записват като наредени двойки: дали ще напишем " $\frac{p}{q}$ " или " (p, q) " не е съществено.

Един начин да бъдат изброени елементите на $\mathbb{Q}^+$ е да вземем таблицата от слайд 52, да изтрием най-лявата колона (за да няма деление на нула) и след това да "вървим" в реда на онова изброяване, като прескачаме наредените двойки, които представляват числа, които вече са били изброени:

$$0, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, \dots$$

След като се убедихме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо, забелязваме, че $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ също е изброимо. Може да си представим тримерна безкрайна таблица от наредените тройки, да вземаме двумерни “разрези” от нея, състоящи се от тройките с една и съща сума, да наредим “разрезите” по сумите им, а в рамките на един “разрез” лесно може да наредим линейно тройките.

Може да обобщим така.

Теорема 2

За всяко цяло положително k , множеството $\mathbb{N}^k$ е изброимо.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (1)

Теорема 3

Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 1 беше достатъчно да покажем само един начин за изброяване. Сега обаче не е достатъчно да покажем, че един определен начин за изброяване “не работи”. Сега се иска да покажем, че **никой** начин за изброяване “не работи”. Ще извършим доказателството с допускане на противното. Допускаме, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, тоест, съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (2)

Характеристична редица е безкрайна булева редица $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, която характеризира, или определя, дадено подмножество X на $\mathbb{N}$ по следното правило. За всяко $n \in \mathbb{N}$:

- ако $a_n = 1$, то n се съдържа в X ,
- ако $a_n = 0$, то n не се съдържа в X .

Ето няколко примера за характеристични редици и подмножествата на $\mathbb{N}$, които определят:

- $(0, 0, 0, \dots)$ */*само нули*/* определя празното множество;
- $(1, 1, 1, \dots)$ */*(само единици)*/* определя самото $\mathbb{N}$;
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ */*(повтаряне на 10)*/* определя четните числа;
- $(0, 1, 1, 0, 0, \dots)$ */*(само две единици)*/* определя $\{1, 2\}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (3)

Нека $\mathcal{A}$ е множеството от характеристичните редици.

Съществува очевидна биекция между $\mathcal{A}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

Твърдението “подмножествата на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени” става “елементите на $\mathcal{A}$ могат да бъдат изброени”. Това е допускането, което ще опровергаем.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (4)

Допускаме изброяване на характеристичните редици: $A_0, A_1, \dots$, като всяка характеристична редица се появява точно веднъж. Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \dots)$, и така нататък. Представяме си ги написани в безкрайна колона:

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots)$$

$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots)$$

$\dots$

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (5)

Разглеждаме главния диагонал: редицата

$$X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots).$$

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots)$$

$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots)$$

...

Образуваме нейната “побитова инверсия”, редицата

$$\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, \overline{a_{3,3}}, \dots).$$

За всяко i, j , $\overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$, и обратно.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (6)

Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и $\overline{X}$ да се среща. Но $\overline{X}$ не може да е A_0 , защото се различават в поне една позиция – нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$; ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.

Аналогично, $\overline{X}$ не може да е A_1 , защото се различават в първата позиция, $\overline{X}$ не може да е A_2 , защото се различават във втората позиция, и така нататък.

Тогава $\overline{X}$ не се среща в колоната; иначе казано, подмножеството B на $\mathbb{N}$, съответстващо на $\overline{X}$, няма образ в хипотетичната биекция $h: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$. ⚡



$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (7)

Алтернативно доказателство

Теорема 4

За всяко множество A , не съществува сюрекция $g : A \rightarrow 2^A$.

Да допуснем противното. Тогава съществува A , такова че съществува сюрекция $g : A \rightarrow 2^A$. Разглеждаме множеството

$$S = \{a \in A \mid a \notin g(a)\} \quad (1)$$

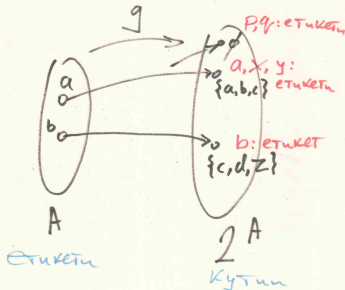
Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция, следователно $\exists x \in A : g(x) = S$.

Дали $x \in S$?

- Ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (1).
- Ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (1).

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (8)

Илюстрация на алтернативното доказателство



Разглеждаме всички етикети, които са запазени в-у кутии, които не ги съдържат. Те образуват S .
 S има етикет x . Дали $x \in S$?

Множеството от реалните числа е неизброимо (1)

Само числата от $[0, 1]$ са неизброимо много

$[0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Нека $\mathcal{A}$ е множеството от всички характеристични редици, което вече дефинирахме на слайд 71. Съществува очевидна биекция $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}$; разглеждаме числата от $[0, 1]$, записани като двоични дроби в двоична позиционна бройна система, без нулата вляво от двоичната точка, без самата точка, с безкрайно дълъг запис, евентуално попълнен с нули вдясно. Примено, числото една втора по принцип се пише като 0.1 в двоична система, но ние ще го запишем като 10000....

Маловажна особеност: някои числа имат по два записа.

- Една втора има два записа по традиционния начин 0.1 и 0.01111..., които по текущия начин на записване стават съответно 10000... и 01111111....
- Единицата има два записа по традиционния начин 1.0 и 0.11111..., които по текущия начин стават съответно 0000... и 11111....

Множеството от реалните числа е неизброимо (2)

$[0, 1]$ и $(0, 1]$ са равномощни

$(0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$. Твърдим, че има биекция $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1]$. Доказателството не може да използва функцията-идентитет $g(x) = x$, защото $(0, 1]$ не съдържа нулата, така че $g(0)$ би било извън $(0, 1]$.

Но може да ползваме идеята на хотела на Hilbert: 0 се изобразява в $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ се изобразява в $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{4}$ се изобразява в $\frac{7}{8}$, и така нататък. Формално, $\forall n \in [0, 1]$:

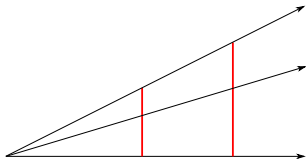
$$f(n) = \begin{cases} \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}, & \text{ако съществува } k \in \mathbb{N}, \text{ такова че } n = \frac{2^k-1}{2^k}, \\ n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Аналогично се доказва, че $[0, 1]$ и $(0, 1)$ са равномощни. Вече видяхме, че $[0, 1]$ е неизброимо. Тогава и $(0, 1)$ е неизброимо.

Множеството от реалните числа е неизброимо (3)

$(0, 1)$ и $\mathbb{R}$ са равномощни (1)

Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $b > a$ и $d > c$. Това, че $[a, b]$ и $[c, d]$ са равномощни, е очевидно. Ако мислим за отсечки с различни дължини:



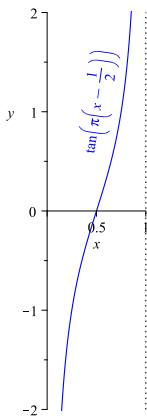
Всеки от интервалите може да е затворен, отворен или полузатворен, равномощността остава в сила.

Ще докажем нещо доста по-контраинтуитивно: кой да е интервал, да кажем $(0, 1)$, е равномощен с $\mathbb{R}$. Отсечка е равномощна с безкрайна права!

Множеството от реалните числа е неизброимо (4)

$(0, 1)$ и $\mathbb{R}$ са равномощни (2)

$\tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$ е биекция, изобразяваща $(0, 1)$ в $\mathbb{R}$.



Графиката е генерирана с Maple(tm).

Реалните числа са (безкрайно) повече от рационалните

Видяхме, че $\mathbb{Q}$ е изброимо, а $\mathbb{R}$ е неизброимо. В някакъв смисъл, реалните числа са повече от рационалните: не просто $\mathbb{Q}$ е строго подмножество на $\mathbb{R}$, но реалните числа са по-високо в йерархията на безкрайностите. Това е доста контраинтуитивно, понеже всеки отворен интервал в $\mathbb{R}$ съдържа безкрайно много рационални числа. Ерго, през колкото и силна “лупа” да разглеждаме реалната ос, няма да видим реален интервал, в който няма рационални числа.

КРАЙ