

ЗАДАЧИ ВЪРХУ ФУНКЦИИ.

Задача 1. Дадено е непразно множество S . Нека $f : S \rightarrow S$ и $g : S \rightarrow S$. Тези функции са такива, че

$$\forall x \in S \ (f(x) = g(f(f(x))) \wedge g(x) = f(g(f(x))))$$

Докажете, че $f = g$.

Решение. Нека x е произволен елемент на S . В сила

$$\begin{aligned} f(x) &= g(f(f(x))) && // \text{ понеже } f(x) = g(f(f(x))) \\ &= \underbrace{g}_{fgf}(f(f(x))) && // \text{ понеже } g(Y) = f(g(f(Y))) \\ &= f(\underbrace{g(f(f(f(x))))}_{f}) && // \text{ понеже } g(f(f(Y))) = f(Y) \\ &= f(f(\underbrace{f}_{gff}(x))) && // \text{ понеже } f(x) = g(f(f(x))) \\ &= f(\underbrace{f(g(f(f(x))))}_{g}) && // \text{ понеже } f(g(f(Y))) = g(Y) \\ &= f(g(f(x))) && // \text{ понеже } f(g(f(x))) = g(x) \\ &= g(x) && // \text{ което и трябваше да покажем} \end{aligned}$$

Покажахме, че $\forall x \in S : f(x) = g(x)$. Тогава $f = g$. □

Задача 2. Докажете, че множеството от функциите от вида $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ е неизброимо безкрайно.

Решение. Да допуснем противното. А именно, че функциите от този вид може да бъдат изброени като $f_0, f_1, f_2, \dots$. Да разгледаме числената редица $f_0(0), f_1(1), f_2(2), \dots$. Но тази редица е функция с домейн $\mathbb{N}$ и кодомейн $\{0, 1\}$. Да дефинираме нотацията $\overline{f_k(k)}$ по следния начин: за всяко $k \in \mathbb{N}$:

$$\overline{f_k(k)} = \begin{cases} 1, & \text{ако } f_k(k) = 0 \\ 0, & \text{ако } f_k(k) = 1 \end{cases}$$

Сега да разгледаме редицата $\overline{f_0(0)}, \overline{f_1(1)}, \overline{f_2(2)}, \dots$, която също е редица от нули и единици, което означава, че е функция с домейн $\mathbb{N}$ и кодомейн $\{0, 1\}$. Но функцията $\overline{f_0(0)}, \overline{f_1(1)}, \overline{f_2(2)}, \dots$ се различава, **за всяко** $j \in \mathbb{N}$, от f_j върху поне една стойност, а именно j . Следователно, $\overline{f_0(0)}, \overline{f_1(1)}, \overline{f_2(2)}, \dots$ не е нито една от функциите в наредбата. □

Определение 1. Дефинираме “композиция на функции” по следния начин. Нека X, Y и Z са произволни множества. Нека $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Функцията $g \circ f : X \rightarrow Z$, дефинирана така:

$$\forall x \in X : (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

наричаме композицията на g и f . Внимание: в изрази $\boxed{g \circ f : X \rightarrow Z}$, $\boxed{g \circ f}$ е името на функцията-композиция.

Задача 3. Дадено е множество A и функция $h : A \rightarrow A$, която е сюрекция. Докажете, че за всяка функция $f : A \rightarrow A$ и всяка функция $g : A \rightarrow A$ е вярно, че ако $f \circ h = g \circ h$, то $f = g$.

Решение. Разглеждаме произволни функции $f : A \rightarrow A$ и $g : A \rightarrow A$. Допускаме, че за всеки елемент $x \in A$ е вярно, че $f \circ h(x) = g \circ h(x)$, тоест, че $f(h(x)) = g(h(x))$, където h е сюрекция. Ще докажем, че за произволен елемент $a \in A$ е вярно, че $f(a) = g(a)$.

Щом h е сюрекция, съществува $b \in A$, такъв че $h(b) = a$. Щом за всеки елемент $x \in A$ е вярно, че $f(h(x)) = g(h(x))$, в частност за b е вярно, че $f(h(b)) = g(h(b))$. Но $h(b) = a$, така че $f(a) = g(a)$, което и трябваше да покажем. $\square$

Задача 4. Докажете, че композицията на функции е асоциативна.

Решение. Искане се да докажем, че ако X, Y, W и Z са произволни домейни и $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow W$ и $h : W \rightarrow Z$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Но двете функции $(h \circ g) \circ f$ и $h \circ (g \circ f)$ имат един и същи домейн и един и същи кодомейн, така че, за да покажем, че са равни, достатъчно е да покажем, че за всеки $x \in X$:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Разглеждаме произволен $x \in X$. Щом f, g и h са функции, съществува единствен $y \in Y$, такъв че $f(x) = y$, съществува единствен $w \in W$, такъв че $g(y) = w$ и съществува единствен $z \in Z$, такъв че $h(w) = z$. И така, щом веднъж изберем x , елементите y, w и z са уникално определени.

Очевидно $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x)))$ и това е елементът z . Но $((h \circ g) \circ f)(x)$ е композицията на $h \circ g$ и f . Очевидно $(h \circ g)(y) = z$, където $y = f(x)$, така че $((h \circ g) \circ f)(x)$ също е z . Доказахме, че композицията на функции е асоциативна. $\square$

Определение 2. Нека W е произволно множество и $h : W \rightarrow W$ е произволна. За всяко $n \in \mathbb{N}^+$ дефинираме, че

$$h^n = \begin{cases} h, & \text{ако } n = 1, \\ h \circ h^{n-1}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Изразът h^n не означава познатото ни от училище повдигане на степен, а е начин за записване на $n - 1$ кратна композиция на функцията h със себе си.

Задача 5. Нека U е произволен универсум и $A, B \subseteq U$ са произволни множества в него. Дефинираме $f : 2^U \rightarrow 2^U$ така:

$$\forall x \in 2^U : f(x) = A \cap (B \cup x)$$

Докажете, че $f^2 = f$.

Решение. Наистина,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(A \cap (B \cup x)) = A \cap (B \cup (A \cap (B \cup x))) = \\ &= A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B \cup x)) = A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup x)) = \\ &= (A \cap (B \cup A)) \cap (B \cup x) = A \cap (B \cup x) = f(x) \end{aligned} \quad \square$$

Задача 6. Нека A и B са множества. Нека $f : A \rightarrow B$ и $g : A \rightarrow B$. Докажете или опровергайте, че

- ① $f \cap g$ е функция.
- ② $f \cap g$ е функция с домейн A и кодомейн B .
- ③ $f \cup g$ е функция.
- ④ Ако $g \subseteq f$, то $f \cup g$ е функция с домейн A и кодомейн B .

Решение. Да разгледаме булетите един след друг.

- ① Твърдението е вярно. Първо да отбележим, че от формална гледна точка, изразът “ $f \cap g$ ” е добре дефиниран, понеже и f , и g са множества, така операцията сечение е приложима върху тях. Нека

$$A' = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$$

$$B' = \{y \in B \mid \exists x \in A (f(x) = g(x) = y)\}$$

Ще докажем, че $f \cap g$ е тотална функция с домейн A' и кодомейн B' . Наистина, за всяко $x \in A'$ знаем, че

- съществува единствено $y_1 \in B$, такова че $f(x) = y_1$, понеже f е тотална функция и
- съществува единствено $y_2 \in B$, такова че $g(x) = y_2$, понеже g е тотална функция.

Освен това въпросните y_1 и y_2 съвпадат, понеже дефиницията на A' е такава, и този елемент $y_1 = y_2$ е елемент на B' , понеже дефиницията на B' е такава. Заклучаваме, че за всяко $x \in A'$ съществува единствено $y \in B'$, такова че $(f \cap g)(x) = y$. Но това е дефиницията на тотална функция с домейн A' и кодомейн B' .

- ② В общия случай това не е вярно. Като контрапример да разгледаме $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $f = \{(a, c), (b, d)\}$ и $g = \{(a, d), (b, c)\}$. Тогава $f \cap g = \emptyset$. Това не е тотална функция с домейн A и кодомейн B .

Резултатът от ① остава в сила! В този пример, $A' = \emptyset$ и $B' = \emptyset$, така че $f \cap g$ е тотална функция, но с празни домейн и кодомейн (така че самата тя е празна).

И така, в общия случай $f \cap g$ е само частична функция, но не и тотална функция, с домейн A и кодомейн B .

- ③ Твърдението не е вярно. Като контрапример пак да разгледаме $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$, $f = \{(a, c), (b, d)\}$ и $g = \{(a, d), (b, c)\}$. Тогава $f \cup g = \{(a, c), (b, d), (a, d), (b, c)\}$. Това не е дори частична функция с домейн A и кодомейн B .

- ④ Твърдението е вярно. Щом $g \subseteq f$, то за всяка наредена двойка $(x, y) \in g$ е вярно, че $(x, y) \in f$. Но g е функция с домейн A и кодомейн B , така че за всяко $x \in A$ има точно една наредена двойка $(x, y) \in g$, която, както видяхме, е елемент и на f . Ключовото наблюдение е, че f не съдържа други елементи, понеже f също е функция с домейн A и кодомейн B (така че за всяко $w \in A$ има точно една наредена двойка $(w, z) \in B$). Щом f не съдържа други елементи, $f = g$. Щом $f = g$, то $f \cup g = f \cup f = f$. Знаем, че f е функция с домейн A и кодомейн B . Тогава и $f \cup g$ е функция с домейн A и кодомейн B . □

Задача 7. Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- а) Намерете f , ако $g(x) = 2x + 1$ и $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 3$.

- б) Намерете g , ако $f(x) = 3x - 1$, $(g \circ f)(x) = 6x + 5$ и g е линейна функция, тоест $g(x) = ax + b$ за някакви $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение.

а) Щом $g(x) = 2x + 1$, то $g(f(x)) = 2f(x) + 1$. Дадено е, че $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 3$, но това е същото като $g(f(x)) = 2x^2 - 3$. Тогава $2f(x) + 1 = 2x^2 - 3$, откъдето $f(x) = x^2 - 2$.

б) Търсим a и b , такива че $g(x) = ax + b$. Щом $f(x) = 3x - 1$, то $g(f(x)) = a(3x - 1) + b = 3ax + b - a$, така че $(g \circ f)(x) = 3ax - a + b$. От друга страна, дадено е, че $(g \circ f)(x) = 6x + 5$. Тогава

$$\begin{aligned} 3a &= 6 \\ -a + b &= 5 \end{aligned}$$

откъдето веднага получаваме $a = 2, b = 7$. И така, $g(x) = 2x + 7$. $\square$

Задача 8. Докажете или опровергайте, че ако $f : X \rightarrow Y$ е биекция и $A, B \subseteq X$, то $f(A \triangle B) = f(A) \triangle f(B)$.

Решение. Твърдението е вярно. Първо ще докажем, че $f(A \triangle B) \subseteq f(A) \triangle f(B)$. Разглеждаме произволен $y \in f(A \triangle B)$. Ще докажем, че $y \in f(A) \triangle f(B)$.

Щом $y \in f(A \triangle B)$, съществува $x \in A \triangle B$, такъв че $f(x) = y$. По определение, $A \triangle B = \{a \mid a \in A \oplus a \in B\}$. Тогава x принадлежи на точно едно от A и B .

БОО, нека $x \in A$ и $x \notin B$. Щом $x \in A$, в сила е $f(x) \in f(A)$. Ще докажем, че $f(x) \notin f(B)$. Да допуснем, че $f(x) \in f(B)$. Тогава съществува $z \in B$, такова че $f(x) = f(z)$. Тъй като f е биекция, трябва да е изпълнено $x = z$. Но тогава $x \in B$, в противоречие с прежде направеното допускане, че $x \notin B$. Следователно, $f(x) \notin f(B)$. Щом $f(x) \in f(A)$ и $f(x) \notin f(B)$, в сила е $f(x) \in f(A) \triangle f(B)$. Но $f(x) = y$. Тогава $y \in f(A) \triangle f(B)$.

Сега ще докажем, че $f(A \triangle B) \supseteq f(A) \triangle f(B)$. Разглеждаме произволен $y \in f(A) \triangle f(B)$. Ще докажем, че $y \in f(A \triangle B)$.

Щом $y \in f(A) \triangle f(B)$, y принадлежи на точно едно от $f(A)$ и $f(B)$.

БОО, нека $y \in f(A)$ и $y \notin f(B)$. Щом $y \in f(A)$, съществува $x \in A$, такъв че $f(x) = y$. Ще докажем, че $x \notin B$. Да допуснем, че $x \in B$. Но тогава $f(x) \in f(B)$, тоест, $y \in f(B)$, в противоречие с прежде направеното допускане, че $y \notin f(B)$. Следователно, $x \notin B$. Щом $x \in A$ и $x \notin B$, вярно е, че $x \in A \triangle B$. Но тогава $f(x) \in f(A \triangle B)$; тоест, $y \in f(A \triangle B)$. $\square$