Задачи по комбинаторика.

Съдържание

1 Свойства и приложения на биномния коефициент

Задача 1. Колко са булевите вектори с n единици и m нули?

Решение. Да разгледаме тези вектори като характеристични вектори върху множество с $n + m$ елемента. Съществува очевидна биекция между тези вектори, от една страна, и подмножествата с мощност n, от друга. Известно е, че броят на тези подмножества е $\binom{n+m}{n}$, което е същото като $\binom{n+m}{m}$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $\binom{n+m}{n}$. □

Задачи 2 и 3 може да бъдат решени и по друг, по-прост начин – като слагания на топки в кутии. Вижте Задачи 31 и 32.

Задача 2. В колко булеви вектора с n единици и m нули, след всяка единица следва поне една нула?

Решение. Удобно е да третираме всеки подвектор единица-нула като едно неделимо блокче $\boxed{10}$. Например, ако векторът е 10001010010, да си го представим не като последователност от единадесет елемента, а като последователност от седем елемента: четири блока единица-нула и още три нули между тях:

$$\boxed{10}\,0\,0\,\boxed{10}\,\boxed{10}\,0\,\boxed{10}$$

Задачата се свежда до задачата, колко вектори от n елемента от един вид (блокчета единица-нула) и $m - n$ елемента от друг вид ("свободни" нули) има. С цел по-ясно представяне на решението, нека сменим символите и кажем, че новата задача е: колко вектори от p елемента от един вид и q елемента от друг вид има. Но ние знаем отговора – съгласно Задача 1, той е $\binom{p+q}{p}$. Заместваме p с n и q с $m - n$ и получаваме $\binom{n+m-n}{n} = \binom{m}{n}$. Забележете, че отговорът е правилен дори когато $n > m$: тогава биномният коефициент $\binom{m}{n}$ е нула, което е точният отговор. □

Задача 3. Колко булеви вектора с n единици и m нули нямат съседни единици?

Решение. Задачата прилича на Задача 2, но не е същата. В тази задача отговорът "брои" и вектори, завършващи на единица, например 10101, които не биват "броени" от Задача 2. Нека S е множеството от векторите, за които става дума в тази задача. S се разбива на S' и S'', където S' са векторите, завършващи на нула, а S'' са векторите, завършващи на единица. Съгласно принципа на разбиването, $|S| = |S'| + |S''|$. Но ние знаем колко е $|S'|$, защото векторите от S' са точно тези, за които става дума в Задача 2: $|S'| = \binom{m}{n}$.

Да разгледаме S''. Всеки вектор от S'' завършва на единица, като вляво от нея има задължително нула (иначе би имало две съседни единици). Тогава съществува очевидна биекция между векторите от S'' и булевите вектори $n-1$ единици и m нули, в които след всяка единица следва поне една нула. Съгласно Задача 2, последните са $\binom{m}{n-1}$. От принципа на биекцията следва, че $|S''| = \binom{m}{n-1}$.

Отговорът е $|S| = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$, което съгласно добре известно свойство на биномните коефициенти е $\binom{m+1}{n}$. □

Задача 4. n на брой хора стоят в редица. По колко начина можем да изберем k от тях, $k \leq n$, така че да не изберем нито двама души, които са един до друг в редицата?

Решение. Всеки избор на k човека от общо n, които са подредени линейно с фиксирана подредба, отговаря биективно на характеристичен вектор с k единици и $n-k$ нули. Допълнителното условие да не бъдат подбрани съседи се "превежда" така: характеристичният вектор да няма съседни единици. Съгласно Задача 3, отговорът е $\binom{n-k+1}{k}$. □

Задача 5. Колко булеви вектори с дължина n не съдържат нито 11, нито 00 като подвектори?

Решение. Ако $n = 0$ има точно един такъв вектор: празният. В противен случай са точно два:

$$
\begin{array}{ll}
10101010\ldots0 \text{ и } 01010101\ldots1 & \text{при четно } n \\
10101010\ldots1 \text{ и } 01010101\ldots0 & \text{при нечетно } n
\end{array}
$$

□

Задача 6. Колко булеви вектори с дължина n не съдържат 11 като подвектор?

Решение. Очевидно е, че ако единиците са прекалено много спрямо n, то подвектори 11 са неизбежни. Максималният брой единици, при който може да няма подвектор 11, е $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, например:

$$
\begin{array}{rl}
10101010: & \text{когато } n = 8, \text{ най-много } 4 = \lceil \frac{8}{2} \rceil \text{ единици} \\
101010101: & \text{когато } n = 9, \text{ най-много } 5 = \lceil \frac{9}{2} \rceil \text{ единици}
\end{array}
$$

Нека p е броят на единиците, а q е броят на нулите. От условието имаме $p + q = n$. Току-що установихме, че $p \in \{0, 1, \ldots, \lceil n/2 \rceil\}$. За всеки конкретни p и q, броят на търсените вектори е $\binom{q+1}{p}$ съгласно Задача 3, тоест $\binom{n-p+1}{p}$. Съгласно принципа на разбиването, отговорът е:

$$
\sum_{p=0}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n-p+1}{p} \tag{1}
$$

Да разгледаме биномния коефициент $\binom{n-p+1}{p}$ от израза (1) в крайния случай, в който $p = \lceil n/2 \rceil$. Тоест, да разгледаме $\binom{n - \lceil n/2 \rceil + 1}{\lceil n/2 \rceil}$.

- Ако n е четно, тоест $n = 2k$ за някое k, то $\lceil n/2 \rceil = \lceil 2k/2 \rceil = \lceil k \rceil = k$ и тогава $\binom{n-\lceil n/2 \rceil+1}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{2k-k+1}{k} = \binom{k+1}{k} = k+1$. И наистина има точно $k+1$ вектори в този случай. За илюстрация, нека $n = 6$ и тогава векторите са точно 101010, 101001, 100101 и 010101.
- Ако n е нечетно, тоест $n = 2k+1$ за някое k, то $\lceil n/2 \rceil = \lceil (2k+1)/2 \rceil = \left\lceil k + \frac{1}{2} \right\rceil = k+1$ и тогава $\binom{n-\lceil n/2 \rceil+1}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{2k+1-(k+1)+1}{k+1} = \binom{k+1}{k+1} = 1$. И наистина има точно 1 вектори в този случай. За илюстрация, нека $n = 7$ и тогава векторите са точно 1010101.

Забележете, че не е грешка да запишем (1) и като

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n-p+1}{p} \tag{2}$$

по простата причина, че ако $p \in \big\{\lceil n/2 \rceil + 1, \lceil n/2 \rceil + 2, \ldots, n\big\}$, то биномният коефициент $\binom{n-p+1}{p}$ е нула. □

Определение 1. Кръгов вектор *ще наричаме вектор, на който първата и последната позиция (също) се считат за съседни. Ако кръговият вектор е $a_1, a_2, \ldots, a_n$, в него съседствата са a_1 с a_2, a_2 с a_3, …, a_{n-1} с a_n, a_n с a_1.* Кръговите вектори *не са* еквивалентни *спрямо ротация, тъй като имат номерирани позиции;* 0001 *и* 0010 *са различни кръгови вектори.* □

Задача 7. Колко кръгови булеви вектори с n единици и m нули нямат съседни единици?

Решение. Да разгледаме множеството S от линейните (тоест, "обикновените") вектори с n единици и m нули без съседни единици. От Задача 3 знаем, че $|S| = \binom{m+1}{n}$. Нека $\tilde{S}$ е подмножеството на S от тези вектори, които започват и завършват с единица. Търсеният в тази задача отговор е $|S| - |\tilde{S}|$, тъй като кръговите вектори без съседни единици отговарят биективно на точно тези линейни вектори без съседни единици, които освен това нямат единица нито в най-лявата, нито в най-дясната позиция.

Да разгледаме $\tilde{S}$. Да дефинираме, че $p = n + m$. Очевидно, $p \geq 3$. Ако $p = 3$, то $\tilde{S}$ се състои само от един вектор: 101. Ако $p \geq 4$, то всеки вектор от $\tilde{S}$ е от вида:

$$\underbrace{1\,0\,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{дължина } p-4}\,0\,1}_{\text{дължина } p}$$

Посоченият подвектор с дължина $p - 4$ има $n - 2$ единици, $m - 2$ нули и единственото ограничение е, че няма съседни единици. Следователно, ако $p \geq 4$, то има очевидна биекция между $\tilde{S}$ и множеството на линейните вектори с $n - 2$ единици, $m - 2$ нули и без съседни единици. Съгласно Задача 3, последните имат брой $\binom{m-2+1}{n-2} = \binom{m-1}{n-2}$. Този резултат е в сила дори когато $p = 3$: тогава $n = 2$, $m = 1$ и $\binom{m-1}{n-2} = \binom{0}{0} = 1$.

И така, отговорът на задачата е

$$
\begin{aligned}
|S| - |\tilde{S}| &= \binom{m+1}{n} - \binom{m-1}{n-2} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!\,n!} - \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-2))!\,(n-2)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!\,n!} - \frac{(m-1)!\,n(n-1)}{(m-n+1)!\,n!} \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\,n!}\left((m+1)m - n(n-1)\right) \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\,n!}\left(m^2 + m - n^2 + n\right) \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\,n!}\left((m-n)(m+n) + (m+n)\right) \\
&= \frac{(m-1)!(m+n)}{(m-n+1)!\,n!}\left(m-n+1\right) \\
&= \frac{(m-1)!(m+n)}{(m-n)!\,n!} \\
&= \frac{m+n}{m} \times \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \\
&= \frac{m+n}{m}\binom{m}{n}
\end{aligned}
$$

□

Задача 8. Рицарите на кръглата маса са 12. Те винаги сядат около масата по един и същи начин. Освен това, между рицарите има вражди: всеки рицар е във вражда с точно тези двама рицари, които са негови съседи около масата. По колко начина може да бъдат подбрани 5 рицари от 12-те за мисия, ако искаме в избраната група да няма вражди?

Решение. Всяко избиране на 5 от 12 рицари може да се представи чрез характеристичен вектор от 5 единици и 7 нули. Векторът обаче не е линеен, а кръгов, и не трябва да съдържа съседни единици – това следва от "кръговото враждуване" на рицарите около масата и изискването да не бъдат избрани враждуващи рицари.

Задачата е същата като задачата, колко кръгови вектора с 5 единици и 7 нули не съдържат съседни единици. Съгласно Задача 7, отговорът е $\frac{7+5}{7}\binom{7}{5} = 36$. □

2 Принципи на комбинаториката (без вкл-изкл)

Задача 9. Книжарницата продава четири вида учебници: Дискретни Структури, Анализ, Алгебра и Геометрия. От всеки вид има по 10 екземпляра (очевидно неразличими помежду си). По колко начина може да бъдат подредени всички 40 учебника на един хоризонтален рафт, ако:

а) няма ограничения;

б) учебниците по Алгебра трябва да са един до друг и няма други ограничения;

в) учебниците от всеки вид трябва да са един до друг и няма други ограничения;

г) никой учебник по Дискретни Структури и никой учебник по Алгебра не може да бъде вдясно от позиция номер 20 и няма други ограничения;

д) учебниците по Алгебра трябва да са вляво от учебниците по Геометрия и няма други ограничения.

Решение.

а) Става дума за пермутации с повторение. Отговорът е мултиномният коефициент

$$\frac{40!}{10! \times 10! \times 10! \times 10!} = 4\,705\,360\,871\,073\,570\,227\,520$$

б) Учебниците по Алгебра могат да бъдат подредени един до друг само по един начин. След това гледаме на десетте учебници по алгебра като на един неделим елемент. Този елемент трябва да разположим заедно с 30 други елемента в редица, като тези други са в три групи по десет, във всяка група неразличими един от друг. Отново имаме пермутации с повторение, този път на 31 неща, от които десет са неразличими помежду си и още десет са неразличими помежду си и още десет са неразличими помежду си и има още едно нещо (блокът от десетте учебника по Алгебра). Отговорът е:

$$\frac{31!}{10! \times 10! \times 10!} = 172\,080\,900\,531\,540$$

в) Учебниците от кой да е вид може да се сложат един до друг по един начин. След това може да гледаме на поредицата от дессете учебника от кой да е вид като на неделим елемент. Има 4! начина да сложим тези 4 елемента в редица. Отговорът е

$$4! = 24$$

г) Учебниците по Алгебра и Дискретни структури заемат точно най-левите 20 позиции, така че множеството, чиято мощност търсим, е декартовото произведение от разполаганията на най-левите 20 позиции на учебниците по Алгебра и Дискретни структури и на най-десните 20 позиции на останалите два вида. Всяко от тези множества има мощност $\frac{20!}{10! \times 10!}$. Решението е:

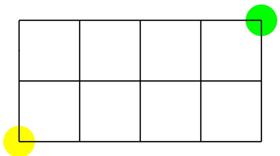
$$\frac{20!}{10! \times 10!} \times \frac{20!}{10! \times 10!} = 34\,134\,779\,536$$

д) В тази подзадача всъщност имаме само три различни вида учебници, които трябва да разглеждаме: Дискретни Структури, Анализ и третият вид, който е обединението от Алгебра и Геометрия. Причината да не разграничаваме в решението си учебниците по Алгебрата от тези по Геометрията е, че щом алгебрите са вляво от геометриите, ако знаем 20-те позиции на обединението им, ние знаем и точно кои от тях (а именно, най-левите 10) се заемат от алгебрите и кои, от геометриите (очевидно, останалите 10). Решението е:

$$\frac{40!}{20! \times 10! \times 10!} = 25\,467\,973\,278\,667\,920$$

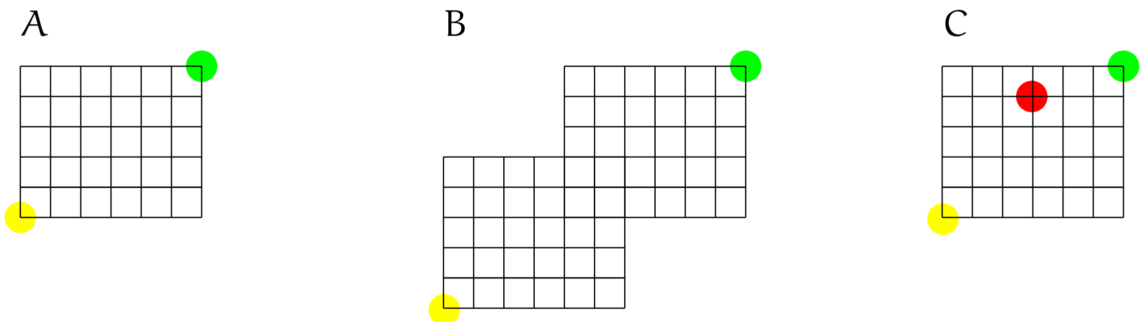
□

Задача 10 използва неявно понятията "правоъгълна мрежа" и "придвижване в правоъгълна мрежа". Не особено формално, *правоъгълна мрежа с размери* $m \times n$ се състои от $m + 1$ хоризонтални отсечки, всяка с дължина n единици, разположени една над друга на разстояния единици, и още $n+1$ вертикални отсечки, всяка с дължина m единици, разположени една до друга на разстояния единици, така че от пресичането на хоризонталните с вертикалните отсечки се получават $m \times n$ квадрата със страна единица. Ето пример за правоъгълна мрежа 2×4:



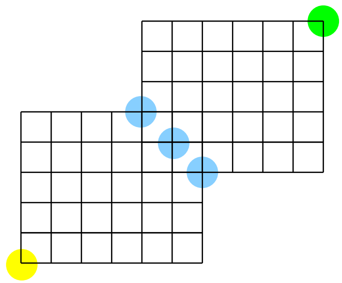
Мислим за правоъгълната мрежа като за улична мрежа от $m+1$ улици в направление изток-запад и още $n+1$ улици в направление север-юг, като тези две групи улици се пресичат, както е показано. Представете си човек, който се намира в югозападния ъгъл (жълтото кръгче). Той или тя трябва да се придвижи до североизточния ъгъл (зеленото кръгче), като на всяко кръстовище може да поеме или на север, или на изток, но никога на юг и никога на запад. Това се нарича *придвижване в правоъгълната мрежа*.

Задача 10. Дадени са три улични мрежи (улици под прав ъгъл) A, B и C, показани долу. Във всяка от тях стартирате в долния ляв ъгъл (с жълто кръгче около него) и трябва да пристигнете в горния десен ъгъл (със зелено кръгче около него), като е допустимо да се придвижвате само надясно или нагоре. A е просто правоъгълна мрежа. B има по-сложна форма—можем да си я представим като правоъгълна мрежа с липсващи части—но правилата за придвижване са същите, само нагоре или надясно. C има правоъгълна форма, но има едно забранено кръстовище – това с червения кръг около него. За всяка от мрежите определете по колко различни начина можете да се придвижите в мрежата от жълтото до зеленото кръгче, като в C не минавате през забраненото кръстовище.

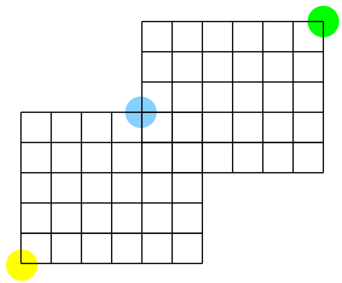


Решение. За обикновена правоъгълна мрежа $m \times n$ отговорът е $\binom{m+n}{n}$, защото всяко придвижване се определя напълно от m на брой хода нагоре и n на брой хода надясно, като тези два вида ходове са смесени в една линейна наредба с големина $m+n$. С други думи, задачата е същата като задачата, по колко начина може да наредим m нули и n единици в линейна наредба (вижте Задача 1). Следователно, за A решението е $\binom{6+5}{5} = 462$.

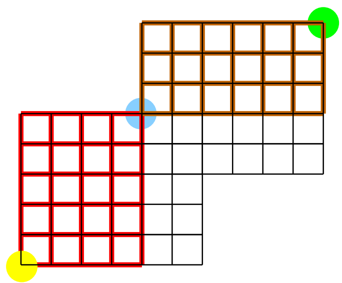
Да разгледаме B. Лесно се вижда, че за да стигнем от жълтата до зелената точка, трябва да минем през поне една от трите сини точки:



Нещо повече: не е възможно да се мине през повече от една от сините точки, следователно се минава през точно една от тях. Иначе казано, множеството от придвижванията между жълтата и зелената точка се разбива на три подмножества съгласно това, през коя синя точка се минава. По принципа на разбиването, отговорът е сумата от мощностите на тези три множества. Да разгледаме произволна синя точка, например тази:



Множеството от придвижванията, минаващи през нея, е декартовото произведение от придвижванията в червената подмрежа между жълтата и синята точка, и в кафявата подмрежа между синята и зелената точка:



В червената подмрежа те са $\binom{4+5}{4} = 126$, а в кафявата, $\binom{6+3}{3} = 84$. За тази синя точка имаме $126 \times 84 = 10\,584$ придвижвания. За другите две сини точки напълно аналогично имаме $\binom{5+4}{4} \times \binom{5+4}{4} = 15\,876$ и $\binom{6+3}{3} \times \binom{4+5}{4} = 10\,584$. Отговорът за мрежа B е $10\,584 + 15\,876 + 10\,584 = 37\,044$.

Да разгледаме C. Множеството от придвижванията, неминаващи през червената точка, е разликата между всички придвижвания между жълтата и зелената точки без ограничения (които са, както видяхме, 462) и тези, които минават през червената точка. По начин, напълно аналогичен на извеждането на отговора за B, показваме, че придвижванията, минаващи през червената точка, са $\binom{3+4}{3} \times \binom{3+1}{1} = 140$. Отговорът за C е $462 - 140 = 322$. □

3 Принцип на включването и изключването

Задача 11. Да се реши, **използвайки принципа на включването и изключването**, колко са нечетните числа от интервала $[1000, 10\,000]$, които нямат повтарящи се цифри в десетична позиционна бройна система.

Решение. Задачата има изключително просто решение $8 \times 8 \times 7 \times 5 = 2240$, което се получава, ако съобразим, че става дума за числата с точно четири цифри (очевидно без водеща нула; първата цифра е от 1 до 9), две по две различни, които завършват на 1 или 3 или 5 или 7 или 9. Прилагаме комбинаторния принцип на умножението по подходящ начин: има точно 5 избора за последната цифра, за всеки от тях точно 8 избора за първата, при избрани последна и първа цифра има точно 8 избора за втора цифра (тя вече може да е 0), за всеки от тези три избора, има точно 7 избора за третата цифра.

Но в тази задача се иска решение с принципа на включването и изключването! Да означим с U множеството от нечетните числа от интервала $[1000, 10\,000]$. Да означим с S множеството от нечетните числа от интервала $[1000, 10\,000]$, които нямат повтарящи се цифри. За всяко $x \in U$, очевидно x се представя в десетична бройна система като

$$x = a_1\, a_2\, a_3\, a_4$$

където $a_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $a_2, a_3 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $a_4 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Нека:

- B_1 е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2$,
- B_2 е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_3$,
- B_3 е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_4$,
- B_4 е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_3$,
- B_5 е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_4$,
- B_6 е множеството от числата от U, за които $a_3 = a_4$.

Очевидно:

$$S = U \setminus \big(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6\big) = \overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6}$$

Прилагаме обобщения закон на Де Морган и получаваме:

$$S = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6}$$

По принципа на включването и изключването:

$$
\begin{aligned}
|S| = |U| & \\
&- (|B_1| + |B_2| + |B_3| + |B_4| + |B_5| + |B_6|) \\
&+ \big(|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_1 \cap B_4| + \\
&\quad |B_1 \cap B_5| + |B_1 \cap B_6| + |B_2 \cap B_3| + \\
&\quad |B_2 \cap B_4| + |B_2 \cap B_5| + |B_2 \cap B_6| + \\
&\quad |B_3 \cap B_4| + |B_3 \cap B_5| + |B_3 \cap B_6| + \\
&\quad |B_4 \cap B_5| + |B_4 \cap B_6| + |B_5 \cap B_6|\big) \\
&- \big(|B_1 \cap B_2 \cap B_3| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4| + |B_1 \cap B_2 \cap B_5| + \\
&\quad |B_1 \cap B_2 \cap B_6| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4| + |B_1 \cap B_3 \cap B_5| + \\
&\quad |B_1 \cap B_3 \cap B_6| + |B_1 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_4 \cap B_6| + \\
&\quad |B_1 \cap B_5 \cap B_6| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4| + |B_2 \cap B_3 \cap B_5| + \\
&\quad |B_2 \cap B_3 \cap B_6| + |B_2 \cap B_4 \cap B_5| + |B_2 \cap B_4 \cap B_6| + \\
&\quad |B_2 \cap B_5 \cap B_6| + |B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_3 \cap B_4 \cap B_6| + \\
&\quad |B_3 \cap B_5 \cap B_6| + |B_4 \cap B_5 \cap B_6|\big) \\
&+ \big(|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_5| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_6| + \\
&\quad |B_1 \cap B_2 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_2 \cap B_4 \cap B_6| + |B_1 \cap B_2 \cap B_5 \cap B_6| + \\
&\quad |B_1 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_6| + |B_1 \cap B_3 \cap B_5 \cap B_6| + \\
&\quad |B_1 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_6| + \\
&\quad |B_2 \cap B_3 \cap B_5 \cap B_6| + |B_2 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| + |B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6|\big) \\
&- \big(|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_6| + \\
&\quad |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_5 \cap B_6| + |B_1 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| + \\
&\quad |B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6|\big) \\
&+ |B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6|
\end{aligned} \tag{3}
$$

Нека дефинираме, че:

- $A_{1,2}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2$,
- $A_{1,3}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_3$,
- $A_{1,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_4$,
- $A_{2,3}$ е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_3$,
- $A_{2,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_4$,
- $A_{3,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_3 = a_4$,
- $A_{1,2,3}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2 = a_3$,
- $A_{1,2,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2 = a_4$,
- $A_{1,3,4,}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_3 = a_4$,
- $A_{2,3,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_2 = a_3 = a_4$,

- $A_{1,2,3,4}$ е множеството от числата от U, за които $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Очевидно:

$$
\begin{aligned}
|A_{1,2}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1=a_2} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 450\\
|A_{1,3}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1=a_3} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 450\\
|A_{1,4}| &= \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_1=a_4} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} = 500\\
|A_{2,3}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2=a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 450\\
|A_{2,4}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_2=a_4} = 450\\
|A_{3,4}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_3=a_4} = 450\\
|A_{1,2,3}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1=a_2=a_3} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_4} = 45\\
|A_{1,2,4}| &= \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_1=a_2=a_4} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_3} = 50\\
|A_{1,3,4}| &= \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_1=a_3=a_4} \times \underbrace{10}_{10 \text{ възможности за } a_2} = 50\\
|A_{2,3,4}| &= \underbrace{9}_{9 \text{ възможности за } a_1} \times \underbrace{5}_{5 \text{ възможности за } a_2=a_3=a_4} = 45\\
|A_{1,2,3,4}| &= 5 \;\text{ тъй като } A_{1,2,3,4} = \{1111, 3333, 5555, 7777, 9999\}
\end{aligned}
$$

Очевидно:

$$|U| = 4500 \tag{4}$$

За сумата от големините на множествата имаме:

$$\sum |B_i| = 5 \times 450 + 500 = 2750 \tag{5}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията две по две. Лесно е да се съобрази, че:

$$
\begin{aligned}
B_1 \cap B_2 &= A_{1,2,3}\\
B_1 \cap B_3 &= A_{1,2,4}\\
B_1 \cap B_4 &= A_{1,2,4}\\
B_1 \cap B_5 &= A_{1,2,4}\\
B_2 \cap B_3 &= A_{1,3,4}\\
B_2 \cap B_4 &= A_{1,2,3}\\
B_2 \cap B_6 &= A_{1,3,4}\\
B_3 \cap B_5 &= A_{1,2,4}\\
B_3 \cap B_6 &= A_{1,3,4}\\
B_4 \cap B_5 &= A_{2,3,4}\\
B_4 \cap B_6 &= A_{2,3,4}\\
B_5 \cap B_6 &= A_{2,3,4}
\end{aligned}
$$

Веднага следва, че:

$$
\begin{aligned}
&|B_1 \cap B_2| = 45\\
&|B_1 \cap B_3| = 50\\
&|B_1 \cap B_4| = 45\\
&|B_1 \cap B_5| = 50\\
&|B_2 \cap B_3| = 50\\
&|B_2 \cap B_4| = 45\\
&|B_2 \cap B_6| = 50\\
&|B_3 \cap B_5| = 50\\
&|B_3 \cap B_6| = 50\\
&|B_4 \cap B_5| = 45\\
&|B_4 \cap B_6| = 45\\
&|B_5 \cap B_6| = 45
\end{aligned}
$$

Остава да определим $|B_1 \cap B_6|$, $|B_2 \cap B_5|$ и $|B_3 \cap B_4|$ при сеченията две по две. $B_1 \cap B_6$ е множеството от числата с $a_1 = a_2$ и $a_3 = a_4$ – то не е едно от $A_{i,j}$ или $A_{i,j,k}$. $|B_1 \cap B_6| = 9 \times 5 = 45$ заради 9-те възможности за $a_1 = a_2$ и независимите 5 възможности за $a_3 = a_4$. $|B_2 \cap B_5| = 9 \times 5 = 45$ заради 9-те възможности за $a_1 = a_3$ и независимите 5 възможности за $a_2 = a_4$. $|B_3 \cap B_4| = 10 \times 5 = 50$ заради 10-те възможности за $a_2 = a_3$ и независимите 5 възможности за $a_1 = a_4$. Общо за сумата от големините на сеченията две по две имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j| = 8 \times 45 + 7 \times 50 = 710 \tag{6}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията по тройки. Лесно е да се съобрази, че:

$$
\begin{aligned}
&B_1 \cap B_2 \cap B_3 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_2 \cap B_4 = A_{1,2,3}\\
&B_1 \cap B_2 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_2 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_3 \cap B_4 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_3 \cap B_5 = A_{1,2,4}\\
&B_1 \cap B_3 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_4 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_4 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_1 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_3 \cap B_4 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_3 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_3 \cap B_6 = A_{1,3,4}\\
&B_2 \cap B_4 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_4 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_2 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_3 \cap B_4 \cap B_5 = A_{1,2,3,4}\\
&B_3 \cap B_4 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_3 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}\\
&B_4 \cap B_5 \cap B_6 = A_{2,3,4}
\end{aligned}
$$

Общо за сумата от големините на сеченията по тройки имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j \cap B_k| = 16 \times 5 + 2 \times 45 + 2 \times 50 = 270 \tag{7}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията по четворки. Всички сечения по четворки са равни на $A_{1,2,3,4}$, тоест:

$$B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l = A_{1,2,3,4}$$

Общо за сумата от големините на сеченията по четворки имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l| = 15 \times 5 = 75 \tag{8}$$

Сега търсим сумата от големините на сеченията по петорки. Всички сечения по петорки също са равни на $A_{1,2,3,4}$, тоест:

$$B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l \cap B_m = A_{1,2,3,4}$$

Общо за сумата от големините на сеченията по четворки имаме:

$$\sum |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_l \cap B_m| = 6 \times 5 = 30 \tag{9}$$

Сечението на всичките шест множества $B_1, \dots, B_6$ е:

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6 = A_{1,2,3,4}$$

Големината му е:

$$|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap B_6| = 5 \tag{10}$$

Заместваме (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) в (3) и получаваме

$$|S| = 4500 - 2750 + 710 - 270 + 75 - 30 + 5 = 2240$$

□

Задача 12. В група от студенти всеки владее поне един език от анлийски, френски и немски. Нека A_E е подмножеството на студентите, владеещи английски, A_F е подмножеството на студентите, владеещи френски , а A_G е подмножеството на студентите, владеещи немски. Нека A_{EF} е подмножеството на студентите, владеещи английски и френски, A_{EG} е подмножеството на студентите, владеещи английски и немски, а A_{FG} е подмножеството на студентите, владеещи френски и немски. Нека A_{EFG} е подмножеството на студентите, владеещи английски, френски и немски. Дадено е, че

$$\begin{aligned}
|A_E| &= 19\\
|A_F| &= 25\\
|A_G| &= 21\\
|A_{EF}| &= 13\\
|A_{EG}| &= 7\\
|A_{FG}| &= 9\\
|A_{EFG}| &= 3
\end{aligned}$$

От колко студента се състои групата?

Решение. Нека A е множеството от всички студенти в тази група. Тъй като $A = A_E \cup A_F \cup A_G$, може да смятаме, че A е универсумът и $\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A = \emptyset$. От принципа на включване и изключване знаем, че

$$\left|\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A\right| = |A| - (|A_E| + |A_F| + |A_G|) + (|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}|) - |A_{EFG}|$$

тоест

$$0 = |A| - (19 + 25 + 21) + (13 + 7 + 9) - 3$$

откъдето

$$|A| = 39$$

□

Задача 13. Дадена е група от 100 студента. Известно е, че 37 студента учат английски, 35 студента учат френски, 33 студента учат немски, 38 студента учат испански, 16 студента учат английски и френски, 8 учат английски и немски, 18 учат английски и испански, 13 учат френски и немски, 9 учат френски и испански, 13 учат немски и испански, 5 студента учат английски, френски и немски, 6 студента учат английски, немски и испански, 5 студента учат френски, немски и испански, а 3 студента учат английски, немски, френски и испански. Колко студента учат английски, френски и испански, ако 14 студента не изучават никакви езици?

Решение. Нека търсеният брой е x. По принципа на включването и изключването имаме:

$$
\begin{aligned}
14 = 100 &\\
&- (37 + 35 + 33 + 38)\\
&+ (16 + 8 + 18 + 13 + 9 + 13)\\
&- (5 + 6 + 5 + x)\\
&+ 3
\end{aligned}
$$

тоест

$$14 = 21 - x \leftrightarrow x = 7$$

□

Задача 14. Колко са тоталните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение. Съгласно принципа на умножението, отговорът е n^m. □

Задача 15. Колко са частичните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение. Нека множеството от тези функции е $\mathcal{F}$. Нека z е елемент, който не се съдържа в Y. Нека $Z = Y \cup \{z\}$. Нека $\mathcal{F}_Z$ е множеството от тоталните функции $f : X \to Z$. Тривиално е да се покаже, че съществува биекция между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_Z$ – за всяка функция от $f \in \mathcal{F}$, която е тотална, съществува точно една функция от $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = f(a)$$

а за всяка функция $f \in \mathcal{F}$, която е не е тотална, съществува точно една функция $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = \begin{cases} f(a), & \text{ако } f(a) \text{ е дефинирано} \\ z, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Съгласно предната задача, $|\mathcal{F}_Z| = (n + 1)^m$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $|\mathcal{F}_Z| = (n + 1)^m$. □

В следващите задачи, под “функция” разбираме “тотална функция”.

Задача 16. Колко са сюрекциите $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $|X| = m$ и $|Y| = n$?

Решение. Да въведем следните означения. Нека N е броят на всички функции. От Задача 14 знаем, че $N = n^m$. Ако от този брой извадим броя на не-сюрективните функции, ще получим броя на сюрекциите. Това ще направим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване. За всеки елемент $a \in Y$, нека N_a е броят на функциите, които “не покриват” a, тоест тези, при които a не е образ на нито един елемент от X. Това не значи, че всички останали елементи от Y са покрити, а че със сигурност a не е покрит – за останалите елементи от Y не се казва нищо. Очевидно $N_a = (n - 1)^m$, защото това е броят на функциите с домейн X и кодомейн $Y \setminus \{a\}$, за всяко $a \in Y$. Тъй като a взема n стойности, имаме сумата от всички N_a е $n.(n-1)^m$. Но разликата

$$n^m - n(n-1)^m \tag{11}$$

не е правилният отговор (освен ако m не е 1), тъй N_{a_1} и N_{a_2} за различни $a_1 \in Y$, $a_2 \in Y$ не броят функции, които са непременно различни – всяка функция, която не покрива нито a_1, нито a_2, ще бъде преброена като единица веднъж от N_{a_1} и веднъж от N_{a_2}. Иначе казано, (11) е по-малко от верния отговор – извадили сме прекалено много.

Нека $N_{a,b}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b \in Y$, $a \neq b$. Както и преди, може да има и други непокрити елементи от Y; със сигурност поне a и b не са покрити. $N_{a,b} = (n-2)^m$, тъй като това е броят на функциите от X в $Y \setminus \{a, b\}$. Сумата от всички такива $N_{a,b}$, по всички двуелементни подмножества $\{a, b\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{2}(n-2)^m$. Но

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m = (-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m \tag{12}$$

все още не е верният отговор (освен ако m не е 2), макар че е по-близо от (11). (12) е повече от верния отговор, тъй като с $+\binom{n}{2}(n-2)^m$ сме добавили повече, отколкото трябва, към (11).

Аналогично, $N_{a,b,c}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b, c \in Y$, $a \neq b \neq c \neq a$. $N_{a,b,c} = (n-3)^m$ и сумата от всички такива $N_{a,b,c}$, по всички триелементни подмножества $\{a, b, c\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{3}(n-3)^m$. Ако m е достатъчно голямо, то

$$(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + (-1)^3\binom{n}{3}(n-3)^m \tag{13}$$

все още не е верният отговор, макар че е още по-близо.

Съгласно принципа на включването и изключването, верният отговор е

$$\begin{aligned}&(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + \\ &(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))^m + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m\end{aligned} \tag{14}$$

Последното събираемо е нула, което съответства на факта, че има нула функции, които не покриват нито един елемент. Накракто, верният отговор е

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

□

Задача 17. Колко стринга с дължина n има над латинската абзука $\{a, b, \ldots, z\}$, такива че всеки символ се среща поне веднъж?

Упътване: Разгледайте стринговете без ограничения като функции от множеството на позициите към множеството от символите (а **не** обратното!). Ограничението за вида на стринговете налага ограничение върху вида на функциите – какви трябва да са те?

Задача 18. Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които нито един елемент не си е на мястото? Числото i си е на мястото, ако се намира на i-та позиция, например в пермутацията 2 1 3 5 6 4, числото 3 си е на мястото и никое друго число не си е на мястото.

Решение. Броят на пермутациите без ограничения е $n!$. Ще извадим от $n!$ броят на пермутациите, в които поне един елемент си е на мястото. Това ще правим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване.

Пермутациите, в които даден елемент е на мястото си и няма други ограничения, са $(n-1)!$ на брой. За всеки друг фиксиран елемент, аналогично, има $(n-1)!$ пермутации, в които той си е на мястото и няма други ограничения. Тъй като има n елемента, от които да фиксираме елемент на позиция, и за всеки елемент имаме $(n-1)!$ пермутации, сумата от последните е $n.(n-1)!$. Естествено, $n(n-1)! = n!$ не е правилният отговор за броя на пермутациите, в които поне един елемент си е на мястото, тъй като брои някои пермутации повече от един път. С други думи, разликата

$$n! - n(n-1)!$$

е по-малка от верния отговор (освен ако n не е 1: наистина, при $n = 1$ отговорът е 0). Съгласно принципа на включване и изключване добавяме броя на пермутациите, в които два елемента са си на местата и няма други ограничения. Тези два елемента можем да изберем по $\binom{n}{2}$ начина, за всеки избор имаме $(n-2)!$ пермутации. Но сумата

$$n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)!$$

е по-голяма от верния отговор (освен ако n не е 2), така че продължаваме аналогично, по принципа на включването и изключването:

$$\begin{aligned}
&n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}n(n-(n-1))! + (-1)^n(n-n)! = \\
&(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)! + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)! + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)! + \ldots \\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))! + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! = \\
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!
\end{aligned}$$

Това е отговорът. □

Няколко странични вметки. Тези пермутации на английски се наричат derangements. *Да разгледаме формулата за броя им:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

От математическия анализ знаем, че

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Тогава броят на деранжиментите клони към $\frac{n!}{e}$*, когато* n *клони към безкрайност. Грубо казано, при големите* n*, деранжиментите са между* $\frac{1}{3}$ *и* $\frac{1}{4}$ *от всички пермутации – изненадващо много!*

Задача 19. По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой съпружески двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

Решение. Нека двойките са c_1, c_2, …, c_n. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, където $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпружески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| \\
&- \sum_{1 \le i \le n} |S_i| \\
&+ \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| \\
&- \sum_{1 \le i < j < \ell \le n} |S_i \cap S_j \cap S_\ell| \\
&+ \ldots \\
&+ (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|
\end{aligned}$$

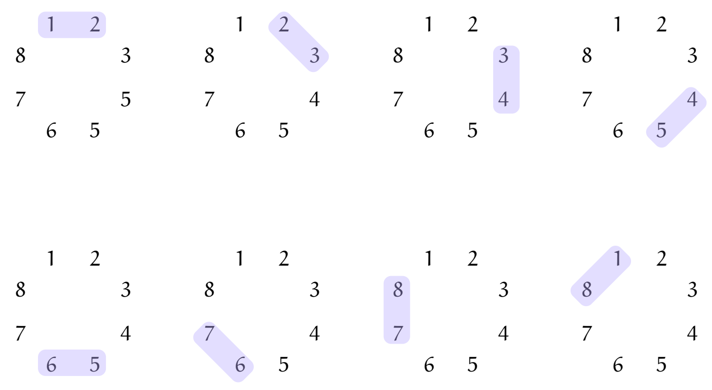
Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различими (номерирани) места без никакви ограничения.

Общият член на сумата е $(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}|$. Игнорирайки множителя $(-1)^k$, тази сума е равна на броя начини k двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани k двойки от $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Ще покажем, че за всяко цяло число k, такова че $1 \le k \le n$, е в сила

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}| = \binom{n}{k} \cdot 2n \cdot (2n - k - 1)! \cdot 2^k \tag{15}$$

Доказателството на (15) не е сложно, но с цел по-добра интуиция нека първо видим пример.

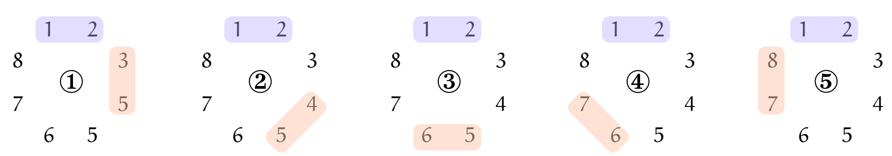
> *Нека* $n = 4$. *Говорим за осем човека в четири съпружески двойки* $c_1 = (w_1, m_1)$, $c_2 = (w_2, m_2)$, $c_3 = (w_3, m_3)$ *и* $c_4 = (w_4, m_4)$. *Начините тези осем човека да седнат без ограничения върху осем номерирани столове, наредени в кръг, е* $8! = 40\,320$. *Както виждате, кръговата наредба тук е без значение: ако столовете бяха наредени линейно, пак броят щеше да е* $40\,320$ *при липса на ограничения.*
>
> *Сега разглеждаме забранени сядания. В колко различни сядания* w_1 *и* m_1 *седят един до друг? Може да мислим за тях двамата като за едно блокче* $\boxed{w_1 m_1}$. *Има два начина за разполагането им в блокчето, но да оставим това съображение за по-късно. В момента разсъждаваме за това, че има* 7 *елемента за разполагане: блокчето и шестте останали хора. Блокчето може да се сложи по* 8 *различни начина (номерата са номерираните столове):*



За всяко слагане на блокчето, шестте останали човека може да седнат на шестте останали стола по $6! = 720$ *начина. Съгласно принципа на умножението, броят на сяданията, в които* w_1 *и* m_1 *са върху съседни столове, е* $8 \times 720 = 5\,760$.

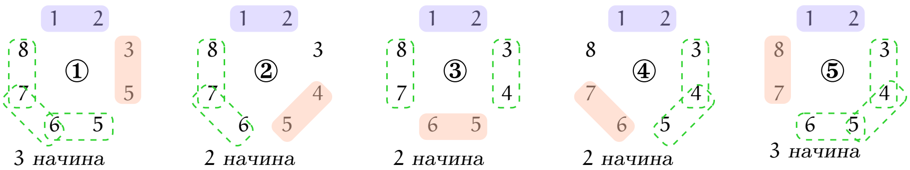
Една странична забележка. Ако наредбата беше линейна, а не кръгова, този брой щеше да бъде по-малък. А именно, $7! = 5\,040$. *Причината е, че тогава щяхме да броим линейните наредби на седем обекта (блокчето и шестте останали). Следователно, когато разсъжденията включват забранени двойки, това, че наредбата е кръгова,* ***вече има значение****. Когато разсъждавахме на ниво индивиди, броят беше* $8! = 40\,320$ *без оглед на това, дали наредбата е кръгова или линейна. Ключовото наблюдение е, че в кръговата наредба, блокчето може да обхваща столове (а именно,* 1 *и* 8*), които не може да обхваща в линейната наредба. Може дори да обобщим, че за блокче с дължина* $t \leq n$, *в линейната наредба има* $n-t+1$ *начина да сложим блокчето, докато в кръговата наредба начините винаги са* n. *Край на страничната забележка.*

Сега да разсъждаваме за две съпружески двойки, седнали по забранен начин. Да си представим, че първо сядат w_1 *и* m_1 *един до друг и правят блокче, а после* w_2 *и* m_2 *един до друг и правят блокче. За първото блокче възможностите са* 8, *както вече видяхме. За второто блокче възможностите са* 5, *и това е за всяко разполагане на първото блокче. Защо не са* 6? *Защото първото блокче "разкъсва" кръговата наредба; за второто блокче има шест стола, но те са линейно, а не кръгово, разположени, поради което начините да бъде сложено са* 5. *Ето:*



Дотук имаме $8 \times 5 = 40$ *възможности. За останалите четири човека възможностите са* $4! = 24$, *независимо от това как са седнали двете двойки преди това. Като цяло, забранените сядания на две двойки са* $8 \times 5 \times 4! = 960$.

Сега да разсъждаваме за три съпружески двойки, седнали по забранен начин. Да си представим, че първо сядат w_1 *и* m_1 *като блокче. Да кажем, че това е първото блокче. Видяхме, че има* 8 *начина за разполагане на първото блокче. После* w_2 *и* m_2 *сядат като блокче. Да кажем, че това е второто блокче. Видяхме, че има* 5 *начина за разполагане на второто блокче по отношение на кое да е разполагане на първото блокче. Разсъждаваме за* w_3 *и* m_3*. Сядайки един до друг, те формират третото блокче. Интересно наблюдение е, че броят на начините за разполагане на третото блокче зависи от това, как са разположени първите две блокчета. Ето:*



За всяко разполагане на третото блокче, броят на сяданията на останалите хора (те са само двама) е $2!$*. Следователно, по отношение на едно фиксирано разполагане на първото блокче (най-горе на фигурата), начините за разполагане на второто и третото блокче се броят от сумата*

$$
\begin{aligned}
&3 \times 2! && // \text{ случай ①} \\
+&2 \times 2! && // \text{ случай ②} \\
+&2 \times 2! && // \text{ случай ③} \\
+&2 \times 2! && // \text{ случай ④} \\
+&3 \times 2! && // \text{ случай ⑤}
\end{aligned}
$$

Ако отчитаме и всички възможни разполагания на първото блокче, броят за трите блокчета е

$$8 \times (3 + 2 + 2 + 2 + 3) \times 2! = 8 \times 12 \times 2 = 192 \tag{16}$$

На пръв поглед решението става много сложно: при три блокчета броят на разполаганията (на блокчетата) не се получава с принципа на умножението, а с принципа на събирането, и оттук за четири, пет и така нататък блокчета решението става "разклонено" и ужасно сложно.

Но това е само ако разсъждаваме за последователно разполагане на блокчетата: първото, после второто, после третото и така нататък. Може да мислим иначе. Първо слагаме първото блокче и за това имаме 8 *възможности. След това забелязваме, че първото блокче, където и да се намира, "срязва" кръговата наредба, така че останалите* 6 *стола са наредени линейно. Върху тези линейно наредени столове слагаме обекти от два вида: блокчета и индивиди. Броят на разполаганията е* $x!$*, където* x *е общият брой на обектите, като това е по отношение на едно фиксирано разполагане на първото блокче. Ако отчитаме всички възможни разполагания на първото блокче, броят става* $8 \times x!$*. Примерно, ако блокчетата са общо три, за всяко слагане на първото блокче имаме да сложим* 2 *блокчета и още* 2 *индивида в линейна наредба; очевидно* $x = 4$*, така че общият брой на разполаганията е*

$$8 \times 4! = 192 \tag{17}$$

И така, двете разсъждения водят до еднакъв резултат; (16) и (17) дават 192 *като числен отговор.*

Да разгледаме общия случай, в който има n *съпружески двойки за достатъчно големи* n *и да видим по колко начина може да сложим три забранени двойки; тоест, три блокчета. Очевидно индивидите извън блокчетата са* $2n-6$ *на брой.*

- *Ако разсъждаваме с последователно слагане, за първото блокче имаме* $2n$ *начина и после имаме следното.*
  - *Ако второто е долепено до първото отдясно, то за третото има* $2n-5$ *начина, оттук* $(2n-5)\times(2n-6)!$ *начина общо.*
  - *Ако второто е долепено до първото отляво, то за третото има* $2n-5$ *начина, оттук* $(2n-5)\times(2n-6)!$ *начина общо.*
  - *Ако второто е през едно от първото отдясно, то за третото има* $2n-6$ *начина, оттук* $(2n-6)\times(2n-6)!$ *начина общо.*
  - *Ако второто е през едно от първото отляво, то за третото има* $2n-6$ *начина, оттук* $(2n-6)\times(2n-6)!$ *начина общо.*
  - *Да разгледаме оставащия случай: второто блокче е на поне два стола от първото блокче от всяка страна. Има точно* $2n-7$ *възможности за слагането на второто блокче по този начин. За всяка позиция на второто блокче, между него и първото блокче от едната страна има* k *стола, а от другата страна има* $2n-k-4$ *стола, където* $k\geq 2$ *и* $2n-k-4\geq 2$*, тоест,* $2\leq k\leq 2n-6$*. Тогава третото блокче може да се сложи или на* $k-1$ *позиции от едната страна на второто, или на* $2n-k-5$ *позиции от другата страна на второто, което прави общо* $2n-6$ *позиции за третото блокче. Оттук има* $(2n-6)\times(2n-6)!$ *начина общо по отношение на едно фиксирано разполагане на второто блокче. Оттук има* $(2n-7)\times(2n-6)\times(2n-6)!$ *начина за второто и третото блокче.*

  Сумираме по всички тези възможности и получаваме

$$
\begin{aligned}
&2n\big(2(2n-5)(2n-6)!+2(2n-6)(2n-6)!+(2n-7)(2n-6)(2n-6)!\big)=\\
&2n\big(\big(2(2n-5)+2(2n-6)+(2n-7)(2n-6)\big)(2n-6)!\big)=\\
&2n\big(\big(4n-10+4n-12+4n^2-26n+42\big)(2n-6)!\big)=\\
&2n\big((4n^2-18n+20)(2n-6)!\big)=\\
&2n\big((2n-4)(2n-5)(2n-6)!\big)=\\
&2n(2n-4)! \qquad (18)
\end{aligned}
$$

- *Ако разсъждаваме по другия начин, за първото блокче има* $2n$ *начина, а след това разполагаме в линейна наредба 2 обекта-блокчета и още* $2n-6$ *обекта-индивиди, тоест, общо* $2n-4$ *обекта. Броят на начините очевидно е*

$$2n(2n-4)! \qquad (19)$$

Еднаквият резултат в (18) и (19) е напълно очакван, защото броят на разполаганията не зависи от разсъжденията, с които достигаме до него, стига те да са коректни; разлика в резултатите би означавала грешка от наша страна. Но резултатът в (18) бе изведен с принципа на разбиването, със значителни усилия, *а и не е очевидно как се обобщава този резултат за k блокчета. Докато резултатът в (19) бе изведен на един ред с принципа на умножението и обобщението му за $k \geq 2$ блокчета е елементарно: $2n$ начина за първото блокче и след това имаме да наредим линейно $k-1$ обекта от един вид (останалите блокчета) и $2n-2-2(k-1) = 2n-2k$ обекта от друг вид; това са общо $2n-k-1$ обекта; броят на разполаганията е $2n(2n-k-1)!$. Забележете, че при $n = 4$ и $k = 3$ това става $8 \times 4!$, точно колкото е (17).*

В заключение да отбележим, че не всички коректни изводи са еднакви. При някои разсъждения желаният извод се достига много трудно и с голяма вероятност за грешка в процеса на извеждането, при други разсъждения желаният извод се достига веднага с практическа невъзможност за допускане на грешка. В текущата задача, правилният начин да се разсъждава е първо да бъде настанена една двойка по забранен начин, което разкъсва кръговата наредба, и после да се мисли колко забранени двойки и индивиди остават и по колко начина можем да се сложат в линейна наредба. А грешният начин е да слагаме двойките една след друга и да се чудим колко възможности има за всяка следваща.

Да направим формално доказателство на (15). Имаме следните четири независими съображения.

- По $\binom{n}{k}$ начина можем да подберем k двойки от общо n.
- По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези k двойки.
- За останалите $k-1$ двойки, по $(2n-k-1)!$ начина можем да разположим хората от тези $k-1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседи, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните k двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $k-1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен обект. Общо обектите са на брой

$$\begin{aligned}
&\underbrace{2n-2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}} \\
-\ &\underbrace{2(k-1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } k-1 \text{ двойки}} \\
+\ &\underbrace{k-1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n-k-1
\end{aligned}$$

  Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $k-1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойка) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n-k-1$ обекта в редица.

- За всяка от досега направените подборки на места за сядане на k двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^k възможни начина.

След като установихме, че (15) е вярно, получаваме директно отговора

$$\begin{aligned}|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2n(2n-k-1)!\, 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2n(2n-k-1)!\, 2^k \\ &= 2n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k-1)!\, 2^k \right) \end{aligned} \tag{20}$$

За $n = 0$ формулата (20) не работи, понеже се получава множител $(-1)!$. За $n = 1$ формулата (20) дава -2, но за $n = 1$ задачата е безсмислена така или иначе. За $n = 2, 3, 4, 5$ формулата (20) дава съответно 8, 192, $11\,904$ и $1\,125\,120$. □

Да разгледаме същата задача, но с линейна, а не кръгла, маса. Иначе казано, по колко начина можем да наредим в редица хората от n на брой съпружески двойки, така че съпрузите от нито една двойка да не са съседи в редицата. Отговорът е

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k)!\, 2^k \tag{21}$$

Тук разсъжденията са по-прости. Сега сядането на първата двойка не разкъсва кръговата наредба, правейки я линейна, така че първата двойка не бива третирана по различен начин в решение. Начините за непозволено сядане на k двойки е $\binom{n}{k}(2n-k)!2^k$, понеже по $\binom{n}{k}$ начина можем да изберем k двойки-нарушители, след това имаме $2n - 2k + k = 2n - k$ обекта за нареждане в линейна наредба ($2n - 2k$ са хората извън двойките и освен това има k обекта от тип двойка), откъдето е множителят $(2n - k)!$, и във всяка двойка има два начина за разполагането на дамата и господина, което дава множителя 2^k.

За стойности на аргумента $0, 1, 2, 3, 4, 5$, формулата (21) дава съответно 0, 0, 32, $1\,440$, $110\,592$ и $12\,633\,600$. Тези стойности са значително по-големи от стойностите, които получаваме от (20). Причината е ясна: в кръговата наредба има повече съседства, отколкото в линейната, и това са повече ограничения, заради които кръговите разполагания са по-малко от линейните.

Задача 20. Колко стринга има над азбуката $\{0, 1, 2\}$, в които има точно две букви от всеки вид и няма съседни еднакви символи?

Решение. Без последното ограничение, броят на стринговете съгласно правилото за броя на пермутации с повторения е

$$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$$

Нека универсумът U да е това множество – стринговете с точно две a-та, две b-та и две c-та. Нека дефинираме следните подмножества на U.

- N_1 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2,
- N_2 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3,
- N_3 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4,
- N_4 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 4 и 5,

- N_5 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4,
- $N_{1,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{1,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{2,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{2,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6.

Съгласно принципа на включване и изключване, търсеният отговор е

$$N = |U| - (N_1 + N_2 + \ldots + N_5) + (N_{1,3} + N_{1,4} + \ldots + N_{3,5}) - N_{1,3,5}$$

Забелязваме, че $N_1 = 3 \times \binom{4}{2}$, тъй като има три възможности за символа на първа и втора позиция, а на останалите четири позиции слагаме два символа от друг вид и два от трети вид. Тогава $N_1 = 18$. Забелязваме, че $N_1 = N_2 = \ldots = N_5$.

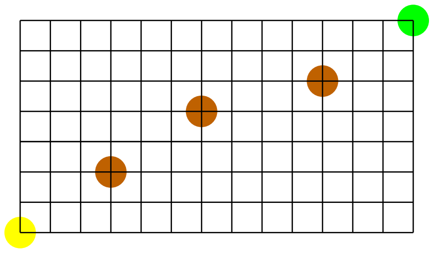
Освен това, $N_{1,3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$, защото имаме три възможности за символа на първа и втора позиция, оттук две възможности за символа на трета и четвърта позиция, и само една възможност спрямо досега направените избори за символа на останалите (пета и шеста) позиции. Също така, $N_{1,3} = N_{1,4} = \ldots = N_{3,5}$.

Накрая, $N_{1,3,5} = 6$ с аналогични съображения. Имаме

$$N = 90 - (5 \times 18) + (6 \times 6) - 6 = 30$$

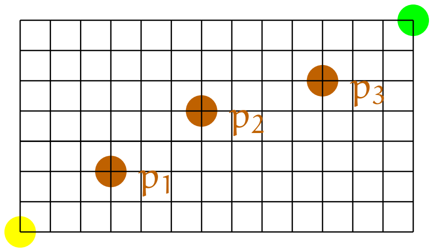
□

Задача 21. Разгледайте следната правоъгълна мрежа:



Разгледайте всички придвижвания в нея, в които тръгвате от долния ляв ъгъл, маркиран с жълт кръг, и пристигате в горния десен ъгъл, маркиран със зелен кръг. Разрешени са ходове само нагоре или надясно по мрежата, също както в Задача 10. Колко от тези придвижвания минават през поне една от трите пресечки, означени с кафяви кръгове?

Решение. Да номерираме точките p_1, p_2 и p_3:



Нека N_k е множеството от придвижванията, минаващи през p_k, за $1 \leq k \leq 3$. Търсим $|N_1 \cup N_2 \cup N_3|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|N_1 \cup N_2 \cup N_3| = |N_1| + |N_2| + |N_3| - (|N_1 \cap N_2| + |N_2 \cap N_3| + |N_1 \cap N_3|) + |N_1 \cap N_2 \cap N_3|$$

Имаме:

$$\begin{aligned}
|N_1| &= \binom{3+2}{2}\binom{10+5}{5} &&= 30\,030\\
|N_2| &= \binom{6+4}{4}\binom{7+3}{3} &&= 25\,200\\
|N_3| &= \binom{10+5}{5}\binom{3+2}{2} &&= 30\,030\\
|N_1 \cap N_2| &= \binom{3+2}{2}\binom{3+2}{2}\binom{7+3}{3} &&= 12\,000\\
|N_2 \cap N_3| &= \binom{6+4}{4}\binom{4+1}{1}\binom{3+2}{2} &&= 10\,500\\
|N_1 \cap N_3| &= \binom{3+2}{2}\binom{7+3}{3}\binom{3+2}{2} &&= 12\,000\\
|N_1 \cap N_2 \cap N_3| &= \binom{3+2}{2}\binom{3+2}{2}\binom{4+1}{1}\binom{3+2}{2} &&= 5\,000
\end{aligned}$$

Отговорът е $55\,760$. □

Задача 22. По колко начина може Дядо Коледа да раздаде 19 различни подаръка на 6 деца, така че всяко дете да получи поне два подаръка?

Решение. Задачата е частен случай на задачата, колко са функциите $f : X \to Y$, такива че $\forall c \in Y \exists a, b \in X : a \neq b \wedge f(a) = f(b) = c$, ако $|X| = m$ и $|Y| = n$. Можем да наречем тези функции, "двукратни сюрекции", тъй като всеки елемент от кодомейна трябва да е "покрит" от поне два различни елемента от домейна.

Решението се получава чрез принципа на включването и изключването, аналогично на обикновените сюрекции. Сега обаче трябва да съобразим по колко различни начина може даден елемент от кодомейна да бъде "нарушител". При обикновените сюрекции даден елемент може да е "нарушител" по един начин: да не е образ на никой елемент от домейна. При двукратните сюрекции може да е "нарушител" по два начина: да не е покрит изобщо, или да е покрит само веднъж. Отговорът-формула е

$$\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}\right)\right) \tag{22}$$

Сравнете този израз с формулата за броя на сюрекциите:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \tag{23}$$

Да аргументираме (22). Частта $\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}}$ е същата в (22) и (23), защото е свързана с прилагането на принципа на включването и изключването: нарушителите са от 0 до n, за k на брой нарушителя събираемото е със знак $(-1)^k$, и има $\binom{n}{k}$ начина да изберем k нарушителя от общо n елемента. По отношение на (23), разсъждението за множителя $\boxed{(n-k)^m}$ е много просто: това е броят на всички функции, без ограничения, от m-елементен домейн в $(n-k)$-елементен кодомейн.

По отношение на (22), разсъждението за множителя $\sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} \left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right) (n-k)^{m-l}\right)$ е по-сложно. Всеки от тези k нарушителя може да е нарушител по един от двата начина: може да е не е покрит изобщо, или може да е покрит еднократно. Нека l е броят на тези нарушители, които са покрити еднократно. Сумираме за $l = 0, \ldots, k$ със следните съображения.

- При $l = 0$ всички k нарушители не са покрити изобщо, и събираемото става

  $$\binom{k}{0} \left(\prod_{t=0}^{0-1}(m-t)\right) (n-k)^{m-0} = 1 \times 1 \times (n-k)^m = (n-k)^m$$

  тоест точно колкото е съответния множител в (23). Тук имаме итерирано произведение $\prod_{t=0}^{0-1}(m-t)$, в което индексната променлива взема стойности от празен интервал; по дефиниция, такова произведение е 1[†].

- При $l = 1$ имаме точно един нарушител, който е покрит еднократно, а останалите нарушители не са покрити изобщо. Този нарушител можем да изберем по $\binom{k}{1} = k$ начина. Тъй като е покрит еднократно, нарушителят е образ на точно един елемент от домейна, който можем да изберем по $\prod_{t=0}^{1-1}(m-t) = m$ начина. Множителят $(n-k)^{m-1}$ идва оттам, че за останалите елементи от кодомейна—тези, които не са нарушители—разглеждаме всички функции без ограничения от $(m-1)$-елементен домейн в тях. Защо $(m-1)$-елементен? – защото точно един елемент от домейна бива "използван", за да бъде изобразен в единствения нарушител, който е покрит еднократно.

  Събираемото става

  $$\binom{k}{1} \left(\prod_{t=0}^{1-1}(m-t)\right) (n-k)^{m-1} = k \times m \times (n-k)^{m-1}$$

- При $l = 2$, нарушителите, покрити еднократно, са 2. Тях можем да изберем по $\binom{k}{2}$ начина. По $m(m-1)$ начина можем да изберем два елемента от домейна, които се изобразяват в тези два нарушителя. Важно е да бъде разбрано, че този брой е именно $m(m-1)$, а не $\binom{m}{2}$, защото има значение кой елемент (от двата) от домейна върху кой от двата нарушителя се изобразява. С други думи, множителят е $\prod_{t=0}^{2-1}(m-t) = m(m-1)$.

[†]Тъй като 1 е неутралният елемент на операцията умножение. Аналогично, итерирано сумиране, при което индексната променлива взема стойности от празен интервал, е 0, понеже 0 е неутралният елемент на събирането.

Тъй като вече изпозлвахме два елемента от домейна, остават $m-2$ елемента от домейна, такива че за последния множител разглеждаме всички функции от тях върху $(n-k)$-елементен кодомейн, които са на брой $(n-k)^{m-2}$. Събираемото става

$$\binom{k}{2}\left(\prod_{t=0}^{2-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-2} = \binom{k}{2} \times m(m-1) \times (n-k)^{m-2}$$

- При $l = 3$, нарушителите, покрити еднократно, са 3. Тях можем да изберем по $\binom{k}{3}$ начина. По $m(m-1)(m-2)$ начина можем да изберем три елемента от домейна, които се изобразяват в тези три нарушителя; а не по $\binom{m}{3}$. С други думи, множителят е $\prod_{t=0}^{3-1}(m-t)$. Тъй като вече изпозлвахме три елемента от домейна, остават $m-3$ елемента от домейна, такива че за последния множител разглеждаме всички функции от тях върху $(n-k)$-елементен кодомейн, които са на брой $(n-k)^{m-3}$. Събираемото става

$$\binom{k}{3}\left(\prod_{t=0}^{3-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-3} = \binom{k}{3} \times m(m-1)(m-2) \times (n-k)^{m-3}$$

- И така нататък.

С това обосновахме множителя

$$\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}\right)$$

Да разгледаме малък пример, по-малък от този в задачата. Нека домейнът има 8 елемента и кодомейнът има 4 елемента. Очевидно, двукратни сюрекции има. Техният брой е

$$\begin{aligned}
&+1 \times (1 \times 1 \times 4^8)\\
&-4 \times (1 \times 1 \times 3^8 + 1 \times 8 \times 3^7)\\
&+6 \times (1 \times 1 \times 2^8 + 2 \times 8 \times 2^7 + 1 \times 8 \times 7 \times 2^6)\\
&-4 \times (1 \times 1 \times 1^8 + 3 \times 8 \times 1^7 + 3 \times 8 \times 7 \times 1^6 + 1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1^5)\\
&+1 \times (1 \times 1 \times 0^8 + 4 \times 8 \times 0^5 + 6 \times 8 \times 7 \times 0^6 + 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 0^5 + 1 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 0^4) =\\
&2\,520
\end{aligned}$$

В три различни цвята са оцветени трите множителя на

$$\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}$$

И така, обосновахме формулата (22). Ако заместим m с 19 и n с 6 и извършим изчисленията, получаваме отговор $183\,421\,913\,875\,200$. Това е броят на начините за раздаване на подаръците. □

Задача 23. Дадени са множествата $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$ и $E = \{e_1, e_2\}$. Да ги наречем *домейните*. Колко са релациите от вида $R \subseteq A \times B \times C \times D \times E$? За колко от тях е изпълнено, че за всеки домейн, всеки негов елемент се среща в поне един елемент на релацията? И на двата въпроса от Вас се очаква да дадете отговор-формула, който да бъде добре обоснован, последван от отговор-число. Ако имате правилен отговор-формула, даването на числен отговор е тривиално. Можете да използвате обикновен калкулатор или какъвто и да е софтуер, за да получите числата.

Решение. Всички възможни релации са 2^{2^5}, понеже елементите на $A \times B \times C \times D \times E$ са 2^5, и всеки от тях може да присъства или да не присъства в релацията независимо от другите. Друг начин да се изведе резултатът е наблюдението, че съществува очевидна биекция между булевите функции на пет променливи и въпросните релации. Численият отговор е $4\,294\,967\,296$.

За да получим втория отговор, от този брой ще извадим броя на релациите, за които е вярно, че не съдържат поне един елемент от поне един от домейните. Това ще сторим съгласно метода на включването и изключването. Има една особеност: универсумът U няма да е множеството от всички релации, а множеството от всички релации **без празната релация**. Следователно, $|U| = 2^{2^5} - 1$. Нека T_A е множеството от тези непразни релации, които не съдържат поне един символ от A, T_B е множеството от тези непразни релации, които не съдържат поне един символ от B, и така нататък. Ние търсим $\left|\overline{T_A} \cap \overline{T_B} \cap \overline{T_C} \cap \overline{T_D} \cap \overline{T_E}\right|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{T_A} \cap \overline{T_B} \cap \overline{T_C} \cap \overline{T_D} \cap \overline{T_E}\right| = |U| &- (|T_A| + |T_B| + |T_C| + |T_D| + |T_E|) \\
&+ (|T_A \cap T_B| + |T_A \cap T_C| + |T_A \cap T_D| + |T_A \cap T_E| + \ldots + |T_D \cap T_E|) \\
&- (|T_A \cap T_B \cap T_C| + \ldots + |T_C \cap T_D \cap T_E|) \\
&+ (|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D| + \ldots + |T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E|) \\
&- |T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E|
\end{aligned}$$

От общи съображения е ясно, че във всяка от сумите в скоби събираемите са равни, така че

$$\begin{aligned}
\left|\overline{T_A} \cap \overline{T_B} \cap \overline{T_C} \cap \overline{T_D} \cap \overline{T_E}\right| = |U| &- \binom{5}{1}|T_A| \\
&+ \binom{5}{2}|T_A \cap T_B| \\
&- \binom{5}{3}|T_A \cap T_B \cap T_C| \\
&+ \binom{5}{4}|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D| \\
&- \binom{5}{5}|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E|
\end{aligned}$$

Да намерим $|T_A|$. Тъй като разглеждаме непразните релации над петте домейна, поне един елемент от A присъства във всеки елемент от коя да е от разглежданите релации. Следователно търсим броя на релациите, в които присъства точно един от $\{a_1, a_2\}$. Всички непразни релации, в които като представител на A е само a_1 са $2^{2^4} - 1$. Аналогично, всички непразни релации, в които като представител на A е само a_2 са $2^{2^4} - 1$. Тези множества нямат общи елементи, следователно по принципа на разбиването, $|T_A| = 2^{2^4} - 1 + 2^{2^4} - 1 = 2^1\left(2^{2^4} - 1\right)$.

Да намерим $|T_A \cap T_B|$. С аналогични разсъждения стигаме до извода, че като представител на A присъства точно един от $\{a_1, a_2\}$, а като представител на B, точно един от $\{b_1, b_2\}$. Това дава общо четири възможности за това, които представители на A и B се срещат. За всяка от тях, непразните релации са $2^{2^3} - 1$. Следователно, $|T_A \cap T_B| = 2^2\left(2^{2^3} - 1\right)$.

С аналогични разсъждения, $|T_A \cap T_B \cap T_C| = 2^3\left(2^{2^2} - 1\right)$, $|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D| = 2^4\left(2^{2^1} - 1\right)$ и $|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E| = 2^5\left(2^{2^0} - 1\right)$. За проверка, последният израз е 2^5, което е точният брой на непразните релации, несъдържащи точно един елемент от всеки домейн.

И така, отговорът-формула е

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} 2^k \left(2^{2^{5-k}} - 1\right)$$

Отговорът-число е 4 294 321 153. Той може да се получи лесно с джобен калкулатор, но може да се използва и специализиран софтуерен пакет, например Maple с командата

```
sum((-1)^k*binomial(5, k)*2^k*(2^(2^(5-k))-1), k = 0 .. 5);
```

$\square$

Задача 24. Нека $S = \{a, b\}$. Припомнете си, че "фамилия над S" е всеки елемент на 2^{2^S}.

1. Напишете в явен вид всички фамилии над S.
2. Напишете в явен вид всички покривания на S.
3. Използвайки комбинаторния принцип на включването и изключването, намерете формула за броя на покриванията на произволно n-елементно множество, където $n \in \mathbb{N}^+$.
4. Заместете n с 2 в току-що изведената формула и намерете числената стойност. Тя съвпада ли с броя на покриванията на S?

Решение. Очевидно

$$2^S = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$$

Ето всички фамилии над $\{a, b\}$:

$$
\begin{array}{llll}
F_0 = \emptyset & & & \\
F_1 = \big\{\emptyset\big\} & F_2 = \big\{\{a\}\big\} & F_3 = \big\{\{b\}\big\} & F_4 = \big\{\{a, b\}\big\} \\
F_5 = \big\{\emptyset, \{a\}\big\} & F_6 = \big\{\emptyset, \{b\}\big\} & F_7 = \big\{\emptyset, \{a, b\}\big\} & \\
F_8 = \big\{\{a\}, \{b\}\big\} & F_9 = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} & F_{10} = \big\{\{b\}, \{a, b\}\big\} & \\
F_{11} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\big\} & F_{12} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\big\} & F_{13} = \big\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\big\} & F_{14} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\} \\
F_{15} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\} & & &
\end{array}
$$

Не всички фамилии измежду F_0, ..., F_{15} са покривания. Първо, покриванията не може да съдържат като елемент празното множество. Тогава F_1, F_5, F_6, F_7, F_{11}, F_{12}, F_{13} и F_{15} не се покривания. Второ, обединението на елементите на покриване трябва да е $\{a, b\}$. Тогава F_0, F_2 и F_3 също не са покривания. Тогава покриванията са F_4, F_8, F_9, F_{10} и F_{14}:

$$F_4 = \big\{\{a, b\}\big\} \quad F_8 = \big\{\{a\}, \{b\}\big\} \quad F_9 = \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} \quad F_{10} = \big\{\{b\}, \{a, b\}\big\} \quad F_{14} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$$

Сега да намерим броя на покриванията на n-елементно множество Нека името на множеството е A. Да кажем, че $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, като $n \geq 1$. Знаем, че $|2^A| = 2^n$. Тогава броят на всички фамилии над A е точно 2^{2^n}. Покриванията обаче не може да съдържат празното множество, а знаем, че $\emptyset \in 2^A$. Очевидно е, че $|2^A \setminus \emptyset| = 2^n - 1$.

И така, универсумът за целите на тази задача е $U = 2^{2^A \setminus \emptyset}$, като $|U| = 2^{2^n - 1}$. Забележете, че универсумът съдържа празната фамилия $\{\}$, тоест празното множество; това, което универсумът не може да съдържа, е, примерно, $\{\{\}\} = \{\emptyset\}$.

Естествено, не всеки елемент на U представлява покриване. От мощността на универсума ще извадим броя на фамилиите, които не покриват опорното множество в смисъл, че обединението им не е A. Ще направим това изваждане съгласно принципа на включването и изключването.

Нека X_i е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_i, за произволно $i \in \{1, \ldots, n\}$; с други думи, които не съдържат елемент, съдържащ a_i. Тогава X_i е множеството от фамилиите над $A \setminus \{a_i\}$, които не съдържат празното множество. Тъй като $|A \setminus \{a_i\}| = n-1$, в сила е $X_i = 2^{2^{A \setminus \{a_i\}} \setminus \emptyset}$. Тогава

$$|X_i| = 2^{2^{n-1}-1}$$

Този резултат остава в сила дори при $n = 1$: тогава дясната страна е 1, което е коректно, понеже фамилията, непокриваща единствения елемент a_1, е $\{\}$.

Тогава $X_i \cap X_j$ е множеството от фамилиите от U, които не покриват a_i и не покриват a_j, за някакви i и j, такива че $1 \leq i < j \leq n$. В сила е

$$|X_i \cap X_j| = 2^{2^{n-2}-1}$$

И изобщо, $X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}$ е множеството от фамилиите от U, които не покриват нито един от елементите $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$, за някакви $i_1, \ldots, i_k$, такива че $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, където $1 \leq k \leq n$. В сила е

$$|X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}| = 2^{2^{n-k}-1}$$

Принципът на включване и изключване казва, че търсеният отговор е

$$\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k}| = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}-1} \tag{24}$$

където при $k = 0$ събираемото е $|U|$, а множителят $\binom{n}{k}$ е равен на броя на начините да изберем $i_1, \ldots, i_k$ от $\{1, \ldots, n\}$.

И накрая, да изчислим стойността на (24) при $n = 2$:

$$\sum_{0 \leq k \leq 2} (-1)^k \binom{2}{k} 2^{2^{2-k}-1} =$$
$$(-1)^0 \binom{2}{0} 2^{2^{2-0}-1} + (-1)^1 \binom{2}{1} 2^{2^{2-1}-1} + (-1)^2 \binom{2}{2} 2^{2^{2-2}-1} =$$
$$1 \times 1 \times 2^{2^2-1} + (-1) \times 2 \times 2^{2^1-1} + 1 \times 1 \times 2^{2^{-0}-1} =$$
$$2^{4-1} - 2 \times 2^{2-1} + 2^{1-1} =$$
$$8 - 4 + 1 =$$
$$5$$

И наистина, ние намерихме точно пет покривания на $\{a, b\}$. □

4 Доказателства с комбинаторни разсъждения

Задача 25. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

Решение. Вече доказахме, че броят на сюрекциите от m в n елементно множество е $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$. При $m = n$ получаваме израза от дясната страна. Но ако $n = m$, то тези сюрекции всъщност са биекциите между двете множества. А броят на биекциите е $n!$, което е лявата страна. □

Задача 26. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Решение. 2^n е броят на всички булеви вектори с дължина n. Очевидно $n2^n$ е общият брой на елементите във всички булеви вектори с дължина n. От тези $n2^n$ елементи, половината са нули, а другата половина, единици. Този факт се извежда тривиално от най-общи съображения: ако инвертираме побитово всички вектори, получаваме същото множество, като броят на единиците в началното е равен на броя на нулите в полученото, но понеже полученото е същото като началното, броят на единиците е равен на броя на нулите в него.

Щом половината от $n2^n$ елемента са единици, то единиците са точно $\frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}$. Това е лявата страна на тъждеството, което доказваме. Дясната страна очевидно също брои единиците във всички булеви вектори с дължина n, но го прави по-подробно: $k\binom{n}{k}$ е точно броят на единиците в подмножеството вектори, имащи точно k единици. □

5 Слагания на топки в кутии

Следната таблица показва по колко начина може да бъдат сложени m топки в n кутии, при различни условия. Кутиите може да бъдат различими или неразличими (еднакви), топките, също, което дава четири варианта на задачата. Всеки от тези четири варианта се разбива на три подварианта в зависимост от това, дали няма повече ограничения или не може повече от една топка в кутия или не може да има празна кутия. Вариантът с различни топки и различни кутии, тоест синята част от таблицата, точно отговаря на тоталните функции от m-елементен домейн (топките) в n-елементен домейн (кутиите), а подвариантите с ≤ 1 топка в кутия и ≥ 1 топка в кутия точно отговарят съответно на инекциите и сюрекциите.

В останалите три варианта, в които поне единият вид обекти са еднакви, тоест кафявата, червената и зелената части от таблицата, съответствието с тоталните функции е доста условно. В тези варианти, поне едното от домейна или кодомейна е мултимножество, в което един единствен елемент се повтаря m или n пъти. Нашата формална дефиниция на "функция" не позволява домейнът или кодомейнът да са мултимножества с повтарящи се елементи. Но е напълно мислимо да злоупотребим с формалната дефиниция на "функция", допускайки мултимножества с повтарящи се елементи като домейн или кодомейн. Тогава можем и в кафявата, червената и зелената части на таблицата да мислим за разполаганията на топките в кутиите като за тотални функции или инекции или сюрекции.

Тази таблица може да бъде разширявана с още подварианти, например кутиите да имат дадени капацитети (максимален брой топки) или редът на слагане на топките в кутиите да има значение (при различими топки, естествено).

n кутии

m топки		различими		неразличими	
	различими	без ограничения	n^m	без ограничения	$\sum_{k=1}^{n} \left\{ {m \atop k} \right\}$
		≤ 1 топка в кутия (инекции)	$n^{\underline{m}}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$[\![m \leq n]\!]$
		≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\left\{ {m \atop n} \right\}$
	неразличими	без ограничения	$\binom{m+n-1}{m}$	без ограничения	$\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$
		≤ 1 топка в кутия (инекции)	$\binom{n}{m}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$[\![m \leq n]\!]$
		≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\binom{m-1}{m-n}$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$p(m,n)$

Обяснение на нотациите:

- $n^{\underline{m}}$ е кратък запис за произведението $\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)$. С други думи,

  $$n^{\underline{m}} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-m+1)$$

  Очевидно е, че $n^{\underline{m}} = 0$ при $m > n$. Освен това, има смисъл да се дефинира $n^{\underline{0}} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, тъй като единицата е неутрален елемент на операцията умножение. $n^{\underline{m}}$ се чете n *на падаща степен* m (n *to the* m *falling* на английски).

- $\left\{ {m \atop n} \right\}$—чете се "$m$-подмножество-$n$"—е *число на Стирлинг от втори род*. $\left\{ {m \atop n} \right\}$ е броят на начините за разбиване на m-елементно множество на n подмножества. В сила е рекурентното уравнение

  $$\left\{ {m \atop n} \right\} = n \left\{ {m-1 \atop n} \right\} + \left\{ {m-1 \atop n-1} \right\} \text{ за } m > 0 \text{ и } m \geq n$$

  с гранични условия $\left\{ {k \atop k} \right\} = 1$ за $k \geq 0$ и $\left\{ {k \atop 0} \right\} = 0$ за $k > 0$. Съществува следната връзка между числата на Стирлинг от втори род и броят на сюрекциите:

  $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = n! \left\{ {m \atop n} \right\}.$$

- $p(m,n)$ е броят на целочислените разбивания на числото m на n части (на английски, *number of integer partitions*). *Целочислено разбиване на* m *на* n *части* е всяка сума от n положителни естествени числа (където $1 \leq n \leq m$), равна на m, където редът на сумиране няма значение. Тогава $\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$ е броят на целочислените разбивания на числото m. Например, числото 4 има пет целочислени разбивания:

$$\begin{aligned}
&4 = 1+1+1+1\\
&4 = 1+1+2\\
&4 = 2+2\\
&4 = 1+3\\
&4 = 4
\end{aligned}$$

Очевидно, $p(4,2) = 2$.

В сила е рекурентното уравнение

$$p(n,k) = p(n-k,k) + p(n-1,k-1)$$

с гранични условия $p(k,k) = 1$ за $k \geq 0$ и $p(k,0) = 0$ за $k \geq 1$ и $p(t,k) = 0$ за $t < k$.

- $[\![q]\!]$, където q някакъв израз с булева интерпретация, се дефинира така:

$$[\![q]\!] = \begin{cases} 1, & \text{ако } q \text{ е истина} \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Например, $[\![m \leq n]\!]$ е равно на 1, когато $m \leq n$, а във всички останали случаи е 0. Тази нотация се нарича *нотация на Iverson*.

Задача 27. Колко различни решения в естествени числа има уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

Решение. Търси се броят на наредените петорки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ от естествени числа, чиито елементи имат сума сто. В термините на топки в кутии, задачата е, по колко различни начина можем да сложим 100 неразличими топки (сто единици) в пет различни кутии (петте променливи). От червената част на таблицата знаем, че m еднакви топки може да бъдат сложени по $\binom{m+n-1}{n-1}$ начина в n различни кутии. И така, отговорът е:

$$\binom{100+5-1}{5-1} = 4\,598\,126$$

□

Задача 28. Колко различни наредени петорки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ от естествени числа удовлетворяват

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100\\
&0 \leq x_1 \leq 30\\
&0 \leq x_2 \leq 30\\
&0 \leq x_3 \leq 30\\
&0 \leq x_4 \leq 30\\
&0 \leq x_5 \leq 30
\end{aligned}$$

Решение. Задачата е подобна на Задача 27, но сега кутиите имат "капацитети": най-много 30 топки в кутия. Нека B_i е множеството от конфигурациите-решения от Задача 27, в които кутия i е "нарушител"—тоест в нея има поне 31 топки—за $1 \leq i \leq 5$. Търсим броя на конфигурациите, в които нарушения няма за нито една кутия. С други думи, търсим

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}|$$

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 5} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |B_i \cap B_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |B_i \cap B_j \cap B_k| + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j < k < t \leq 5} |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_t|}_{\text{това е } 0} - \underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5|}_{\text{това е } 0}$$

където U е универсумът от всички слагания на сто еднакви топки в пет различни кутии без ограничения. Както показахме в Задача 27, $|U| = 4\,598\,126$. Ясно е защо последните две събираеми са нули: няма как при обща сума 100, четири или пет променливи да са поне 31. Следователно, търсеният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}| = 4\,598\,126 - \sum_{1 \leq i \leq 5} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |B_i \cap B_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |B_i \cap B_j \cap B_k| \quad (25)$$

От общи съображения е ясно, че $|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = |B_5|$ и $\underbrace{|B_1 \cap B_2| = \ldots = |B_4 \cap B_5|}_{10 \text{ такива}}$ и $\underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = \ldots = |B_3 \cap B_4 \cap B_5|}_{10 \text{ такива}}$. Търсеният отговор е:

$$4\,598\,126 - 5 \times |B_1| + 10 \times |B_1 \cap B_2| - 10 \times |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \quad (26)$$

Колко е $|B_1|$? Щом x_1 е сигурен нарушител на капацитета (и няма друг сигурен нарушител), то е вярно, че

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100\\
&31 \leq x_1\\
&0 \leq x_2\\
&0 \leq x_3\\
&0 \leq x_4\\
&0 \leq x_5
\end{aligned}$$

Да представим x_1 като $x_1 = x_1' + 31$. Тогава условието $31 \leq x_1$ е същото като $0 \leq x_1'$, а $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ става $x_1' + 31 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$, тоест $x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 69$. Изведохме, че $|B_1|$ е мощността на множеството от наредените петорки $(x_1', x_2, x_3, x_4, x_5)$, които удовлетворяват:

$$\begin{aligned}
&x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 69\\
&0 \leq x_1'\\
&0 \leq x_2\\
&0 \leq x_3\\
&0 \leq x_4\\
&0 \leq x_5
\end{aligned}$$

Но ние знаем колко такива наредени петорки има: $\binom{69+5-1}{5-1} = 1\,088\,430$.

Напълно аналогично, $|B_1 \cap B_2| = \binom{38+5-1}{5-1} = 111\,930$ и $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = \binom{7+5-1}{5-1} = 330$. Заместваме в (26) и получаваме крайния отговор

$$4\,598\,126 - 5 \times 1\,088\,430 + 10 \times 111\,930 - 10 \times 330 = 271\,976$$

□

Задача 29. Плочкаджия трябва да покрие с плочки стена с размери 2 м. на 4 м. Всяка плочка е с размери 20 см. на 20 см., а цветът ѝ е или зелен, или червен. Общо плочките са 200 на брой: 80 зелени и 120 червени. Плочките се редят плътно една до друга и не е разрешено да се режат, следователно трябва да бъдат наредени в конфигурация от 10 реда и 20 колони. Зелените плочки са неразличими помежду си и червените плочки са неразличими помежду си. По колко начина може да бъде направено покриването, ако:

- Няма ограничения.
- Във всеки ред зелените плочки, ако има такива, са вляво от червените, ако има такива.

Решение. В първото подусловие е достатъчно да съобразим, че двумерната наредба на плочките няма никакво значение за търсения брой на възможните покривания. Възможните покривания са точно толкова (по принципа на биекцията), колкото са възможностите да бъдат наредени в линейна наредба 80 зелени и 120 червени плочки. С други думи, това са възможностите да изберем 80 плочки от общо 200. Броят е

$$\binom{200}{80} = 1\,647\,278\,652\,451\,762\,678\,788\,128\,833\,110\,870\,712\,983\,038\,446\,517\,480\,945\,400 \approx 10^{57}$$

Второто подусловие се решава точно като Задача 28. Първо съобразяваме следното: както и в предишното подусловие, разполагането на зелените плочки напълно определя разполагането на червените – червените се слагат на 120-те свободни места. Но в сегашното подусловие, зелените плочки се редят плътно вляво. На някои редове може изобщо да няма зелени плочки, на други може да са само зелени плочки, а ако има и от двата вида, зелените са вляво. Ясно е, че за всеки ред, **броят** на зелените плочки—число между нула и двадесет включително—определя напълно подреждането в този ред. Тогава цялата наредба (върху стената) се определя от десет числа, всяко от което е между нула и двадесет включително, и всички тези числа се сумират до 80.

Внимание – редовете са различими! Например, слагането на 19 зелени плочки на първи ред, 13 на втори и по 6 на всички останали редове е **различно** слагане от 13 зелени плочки на първи ред, 19 на втори и по 6 на всички останали редове. Следователно, става дума не за множество от числа, а за вектор от числа, които се сумират до 80.

Задачата е същата като задачата, колко решения в естествени числа има уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 80$$

при ограниченията

$$
\begin{aligned}
&0 \leq x_1 \leq 20\\
&0 \leq x_2 \leq 20\\
&0 \leq x_3 \leq 20\\
&0 \leq x_4 \leq 20\\
&0 \leq x_5 \leq 20\\
&0 \leq x_6 \leq 20\\
&0 \leq x_7 \leq 20\\
&0 \leq x_8 \leq 20\\
&0 \leq x_9 \leq 20\\
&0 \leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}
$$

Ако ограниченията бяха само $0 \leq x_i$, $1 \leq i \leq 10$, отговорът щеше да е

$$\binom{80+10-1}{10-1} = \binom{89}{9} = 635\,627\,275\,767$$

тъй като при тези (по-прости) ограничения става дума за комбинаторни конфигурации без наредба, с повтаряне, с размер 80 над опорно множество с мощност 10: все едно имаме линейна наредба от 80 единици и се пита, по колко начина може да сложим 9 разделителя между тях.

При по-сложните ограничения от вида $0 \leq x_i \leq 20$, $1 \leq i \leq 10$, каквито са нашата задача, може да мислим за множеството от $\binom{89}{9}$ решения като за универсум U. Нека $B_i \subseteq U$ е множеството от тези решения, в които $x_i > 20$, за $1 \leq i \leq 10$. Очевидно ние търсим $|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6} \cap \overline{B_7} \cap \overline{B_8} \cap \overline{B_9} \cap \overline{B_{10}}|$. По принципа на включването и изключването,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 10} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 10} |B_i \cap B_j| - \ldots + (-1)^{10} |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{10}|$$

Сега да съобразим, че няма как повече от три x_i-та да бъдат по-големи от 20: ако четири са по-големи от 20 всяко, то сумата ще надхвърли 80. С други думи, достатъчно е да разгледаме тези събираеми в израза на включването и изключването, в които има сечение на най-много три B-та:

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 10} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 10} |B_i \cap B_j| - \sum_{\substack{1 \leq i < j < \\ k \leq 10}} |B_i \cap B_j \cap B_k|$$

От общи съображения е ясно, че B-тата имат една и съща мощност и сеченията им по двойки имат една и съща мощност и сеченията по тройки имат една и съща мощност и сеченията им по четворки имат една и съща мощност. Следователно,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \binom{10}{1} |B_1| + \binom{10}{2} |B_1 \cap B_2| - \binom{10}{3} |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

За да получим $|B_1|$ е достатъчно да съобразим, че броят решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 80$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
21 &\leq x_1\\
0 &\leq x_2 \leq 20\\
0 &\leq x_3 \leq 20\\
0 &\leq x_4 \leq 20\\
0 &\leq x_5 \leq 20\\
0 &\leq x_6 \leq 20\\
0 &\leq x_7 \leq 20\\
0 &\leq x_8 \leq 20\\
0 &\leq x_9 \leq 20\\
0 &\leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}$$

е същата като броят на решенията на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 59$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
0 &\leq x_1\\
0 &\leq x_2 \leq 20\\
0 &\leq x_3 \leq 20\\
0 &\leq x_4 \leq 20\\
0 &\leq x_5 \leq 20\\
0 &\leq x_6 \leq 20\\
0 &\leq x_7 \leq 20\\
0 &\leq x_8 \leq 20\\
0 &\leq x_9 \leq 20\\
0 &\leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}$$

Следователно,

$$|B_1| = \binom{59+9}{9} = \binom{68}{9} = 49\,280\,065\,120$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
|B_1 \cap B_2| &= \binom{38+9}{9} = \binom{47}{9} = 1\,362\,649\,145\\
|B_1 \cap B_2 \cap B_3| &= \binom{17+9}{9} = \binom{26}{9} = 3\,124\,550
\end{aligned}$$

Крайният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = \binom{89}{9} - \binom{10}{1}\binom{68}{9} + \binom{10}{2}\binom{47}{9} - \binom{10}{3}\binom{26}{9} = 203\,770\,890\,092$$

Задача 30. Тук става дума за стандартни кубични зарове, всяка страна на които е маркирана с точно едно от ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅. Тези символи наричаме *лицата*. Когато казваме "n различни зара" за някакво n, имаме предвид, че няма два еднакви зара – например всеки зар е оцветен в цвят, различен от цветовете на другите зарове. Когато говорим за зарове от един и същи цвят имаме предвид, че тези зарове са неразличими.

а) По колко различни начина можем да хвърлим шест различни зара?

б) По колко различни начина можем да хвърлим шест еднакви зара?

в) По колко различни начина можем да хвърлим шест зара, три от които са бели, един е червен, един е зелен и един е син?

г) По колко различни начина можем да хвърлим три различни зара, така че сумата от числата е 9 във всяко хвърляне?

д) По колко различни начина можем да хвърлим три еднакви зара, такива че сумата от числата е 9 във всяко хвърляне?

е) По колко различни начина можем да хвърлим три бели и три черни зара, такива че всяко от лицата се появява поне веднъж?

Решение.

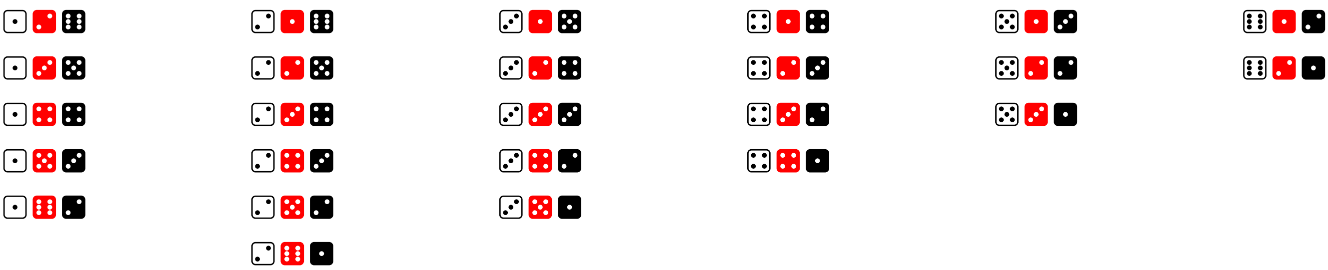
а) Задачата се решава тривиално като задача за слагане на топки в кутии, ако съобразим, че кутиите са лицата ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, а топките са шестте зара. Очевидно и кутиите, и топките са различими, така че сме в синята част на таблицата. Отговорът е $6^6 = 46\,656$.

б) Отново можем да сведем задачата до слагане на топки в кутии. Отново, кутиите са лицата ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅, а топките са шестте зара. Сега кутиите са пак различими, но топките са еднакви, така че сме в червената част на таблицата. Отговорът е $\binom{6+6-1}{6-1} = 462$.

в) Да си представим, че хвърляме независимо първо белите зарове, което можем да направим по $\binom{3+6-1}{6-1}$ начина и после цветните зарове, за което възможностите са 6^3. Отговорът се получава по принципа на умножението $\binom{3+6-1}{6-1} \times 6^3 = 12\,096$.

г) Отговорът може да се получи като в задачата "Колко целочислени решения има уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, ако $1 \leq x_i \leq 6$?", която на свой ред има същия отговор като задачата "Колко целочислени решения има уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, ако $0 \leq x_i \leq 5$?" (сравнете със Задача 28). Отговорът 25 може да се получи като $\binom{6+3-1}{3-1} - 3 \times 1 = 25$ чрез прилагане на принципа на включване и изключване.

Тъй като множеството от решенията не е голямо, можем и да конструираме явно, без да ползваме принципа на включване и изключване. Нека зарчетата са бяло, червено и черно.



д) Има шест такива хвърляния, които можем да опишем явно:

⚀⚁⚅

⚀⚂⚄

⚀⚃⚃

⚁⚁⚄

⚁⚂⚃

⚂⚂⚂

е) При шест зара и шест лица, всяко лице да се появява поне веднъж е същото като всяко лице да се появява точно веднъж. Задачата е същата като задачата, по колко начина можем да оцветим шест различни обекта така, че три да получат бял цвят и три, черен цвят. Достатъчно е да определим кои са, например, белите обекти, останалите трябва да са черните. Можем да подберем 3 обекта от общо 6 по $\binom{6}{3} = 20$ начина, което е и отговорът.

□

Задачи 31 и 32 са същите като задачи 2 и 3. Тук предлагаме решения, които се получават като слагания на топки в кутии.

Задача 31. В колко булеви вектора с n единици и m нули, след всяка единица следва поне една нула?

Решение. Представяме си n на брой блокчета $\boxed{10}$, около които трябва да "насипем" още $m-n$ нули, за да получим общо m нули. Нулите са неразличими топки, местата за слагане—общо $n+1$ на брой—са различими кутии. Отговорът е $\binom{(m-n)+(n+1)-1}{(n+1)-1} = \binom{m}{n}$. □

Задача 32. Колко булеви вектора с n единици и m нули нямат съседни единици?

Решение. Представяме си $n-1$ на брой блокчета $\boxed{10}$ и още едно блокче $\boxed{1}$ накрая. Общо блокчетата са n на броя. Около тях трябва да "насипем" $m-n+1$ нули. Нулите са неразличими топки, различимите кутии са колкото в Задача 31 – пак $n+1$. Отговорът е $\binom{(m-n+1)+(n+1)-1}{(n+1)-1} = \binom{m+1}{n}$.

□

6 Рекурентни уравнения

Задача 33. *Двоичен брояч с n позиции* е вектор от n двоични числа (0 или 1), който се интерпретира като число, записано в двоична позиционна бройна система. Броячът бива увеличаван с 1 в дискретни моменти във времето. В началния момент t_0 броячът съдържа само нули, тоест представлява числото 0 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_1 той представлява числото 1 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_2 той представлява числото 2 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_3 той представлява числото 3 в двоична система, и така нататък:

$$\begin{array}{lllll}
t_0: & 0\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\
t_1: & 0\,0 & \cdots & 0\,0\,1 \\
t_2: & 0\,0 & \cdots & 0\,1\,0 \\
t_3: & 0\,0 & \cdots & 0\,1\,1 \\
t_4: & 0\,0 & \cdots & 1\,0\,0 \\
 & \ldots & &
\end{array}$$

Изобщо, в момент t_k броячът съдържа двоичния запис на числото k. Увеличаването на брояча с 1 продължава, докато той съдържа поне една нула. Когато броячът съдържа само единици:

$$\underbrace{1\,1 \quad \cdots \quad 1\,1\,1}_{n \text{ на брой}}$$

увеличаването спира и броячът остава в това състояние. Отговорете на следните въпроси:

1. Кое е числото (в двоична позиционна бройна система), което остава записано в брояча след спирането му?

2. *Битово обръщане* наричаме всяко преминаване от 0 в 1 или от 1 в 0 от даден t_i към следващия t_{i+1}. Например, при преминаването от t_0 в t_1 има точно едно битово обръщане, а именно в най-дясната позиция; при преминаването от t_1 в t_2 има точно две битови обръщания, а именно в двете най-десни позиции ; при преминаването от t_2 в t_3 има точно едно битово обръщане; при преминаването от t_3 в t_4 има точно три битови обръщания; и така нататък. Нека T_n е броят на всички битови обръщания за двоичен брояч с n позиции – от момента t_0 до последния момент, в който увеличаването спира. Напишете рекурентно уравнине за T_n и дайте кратка аргументация за него.

3. Решете рекурентното уравнение чрез метода с характеристичното уравнение.

Решение.

1. Числото е $2^n - 1$.

2. Ако $n = 1$, битовото обръщане е само едно. За по-големи стойности на n забелязваме, че докато старшият бит (най-вляво) е 0 се извършват всички битови обръщания на подброяча с дължина $n - 1$, после се извършват n битови обръщания и от $0\,1\,1\,\ldots\,1\,1$ броячът става $1\,0\,0\,\ldots\,0\,0$ и после, докато старшият бит е 1, се извършват всички битови обръщания на подброяча с дължина $n - 1$. И така:

$$T_1 = 1$$
$$T_n = 2T_{n-1} + n \quad \text{за } n > 1$$

   Алтернативно, началното условие може да е $T_0 = 0$, ако допускаме празен брояч.

3. Решението е $T(n) = 2^{n+1} - n - 2$. □

Задача 34. В някаква до този момент стерилна хранителна среда попада бактерия в 8 часа сутринта. Бактериите се размножават чрез делене: на всеки половин час всяка бактерия се дели на две. Приемете, че бактерии не умират.

1. Напишете рекурентно уравнение за $S(n)$, където $S(n)$ е броят на бактериите в момент $n \times 30$ минути след 8 сутринта, а $n \in \mathbb{N}$.

2. Решете полученото рекурентно уравнение чрез метода с характеристичното уравнение. Решения чрез други методи не се допускат.

3. Колко бактерии ще има в 8 часа вечерта на същия ден?

Решение. Рекурентното уравнение е

$$
\begin{aligned}
&S(0) = 1 \\
&S(n) = 2S(n-1) \qquad \text{за } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Характеристичното уравнение е

$$x - 2 = 0$$

с единствен корен 2. Общото решение на рекурентното уравнение е

$$S(n) = A2^n$$

за някаква константа A. Тъй като $S(0) = 1$ по условие, имаме

$$1 = A2^0$$

Следователно, $A = 1$ и $S(n) = 2^n$. В 8 вечерта бактериите ще са $2^{2(20-8)} = 16\,777\,216$. □

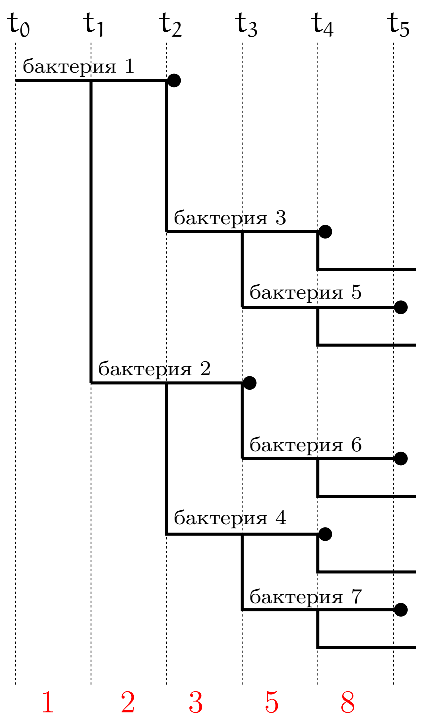
Задача 35. Тази задача е усложнение на Задача 34. Сега допускаме, че бактериите умират, като продължителността на живота на всяка бактерия е точно един час. Допускаме освен това, че при делене на бактерия не се създават две нови (с възраст нула) бактерии, а от старата бактерия се отделя една нова (с възраст нула), като старата бактерия или продължава да живее, ако възрастта ѝ е по-малка от един час (тоест, половин час), или умира, ако е "навършила" един час. (Очевидно всяка бактерия отделя нова бактерия точно два пъти и веднага след това умира). Деленето на бактерии е мигновено. Първата бактерия е (тази в 8 сутринта) е била на възраст нула, попадайки в средата.

1. Напишете рекурентно уравнение за $T(n)$, където $T(n)$ е броят на оставащите да живеят бактерии в момент $n \times 30$ минути след 8 сутринта, а $n \in \mathbb{N}$.
2. Решете полученото рекурентно уравнение.
3. Колко бактерии ще има в 8 часа и 1 минута вечерта на същия ден? Не е задължително отговорът Ви да е получен чрез заместване в решението на рекурентното уравнение; може да изведете броя, използвайки самото рекурентно уравнение, а не решението му.

Решение. Рекурентното уравнение не е уникално. Една възможност е:

$$
\begin{aligned}
&T(0) = 1 \\
&T(1) = 2 \\
&T(2) = 3 \\
&T(n) = 2T(n-1) - T(n-3) \qquad \text{за } n \geq 3
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Разсъждението е следното. Нека дефинираме, че *момент* за целите на това решение е кръгъл час или кръгъл час и 30 мин. и нищо друго, започвайки от 8 ч. сутринта. Тоест, моментите са $t_0 = 08{:}00$, $t_1 = 08{:}30$, $t_2 = 09{:}00$, и така нататък. В t_0 часа има точно една бактерия, първоначално попадналата, на възраст нула. В t_1 тя отделя нова бактерия. В t_2 от първоначалната се отделя второ нейно копие и тя веднага умира и втората също отделя свое копие. И така нататък. Следната фигура илюстрира това.



Във всеки следващ момент t_n броят на бактериите е два пъти пъти по-голям от броя им в t_{n-1}, но не всички от тях остават живи. Тези, които умират, са точно бактериите, родени в t_{n-2} (родените преди час); техният брой е равен на броя на всички бактерии в момент t_{n-3}.

Забележете, че бактериите, които умират, не са всички бактерии от t_{n-2}, а само *родените* в t_{n-2}. В t_{n-2} освен тях има и други бактерии, които междувременно са умрели (а именно, в t_{n-1}). Следователно, рекурентното уравнение е $T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$ *не е решение на тази задача.*

Характеристичното уравнение е

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

Чрез метода на Хорнер факторизираме лявата страна до $(x-1)(x^2-x-1)$ и след решаването на квадратното уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ с корени $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ и $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ получаваме следното мултимножество от корените на характеристичното уравнение:

$$\left\{1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right\}_M$$

Тогава общото решение на рекурентното уравнение е

$$T(n) = A \times 1^n + B \times \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + C \times \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n$$

където A, B и C са някакви константи. Тях определяме, използвайки началните условия

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + C \\
2 &= A + \frac{B}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) + \frac{C}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \\
3 &= A + \frac{B}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 + \frac{C}{4}\left(1-\sqrt{5}\right)^2
\end{aligned}$$

с решения $A = 0$, $B = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}$, $C = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}$. И така, решението на рекурентното уравнение е

$$T(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \tag{28}$$

В 8 часа и една минута вечерта на същия ден броят на бактериите ще е $T(24) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)$ $\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{24} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{24}$. Можем да опростим този израз до $121\,393$, но това опростяване би било трудно и досадно, ако се прави на ръка. По-лесно е да се развие рекурентното уравнение (27), докато стигнем до $n = 24$:

n	$T(n)$
0	1
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144
11	233
12	377
13	610
14	987
15	1597
16	2584
17	4181
18	6765
19	10946
20	17711
21	28657
22	46368
23	75025
24	121393

В 8 ч. и една минута ще има $121\,393$ бактерии.

Интересно наблюдение е, че таблицата съдържа числа на Фибоначи, а именно $F_2, \ldots, F_{26}$, където числата на Фибоначи се дефинират чрез рекурентното уравнение $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 2$. С други думи, таблицата ни навежда на мисълта, че $T(n) = F(n+2)$. Това не е случайно съвпадение: тривиално се доказва по индукция, че числата на Фибоначи удовлетворяват рекурентното уравнение $F_n = 2F_{n-1} - F_{n-3}$ за $n \geq 3$. Виждаме, че една и съща редица от числа може да бъде определена от различни рекурентни уравнения. $\square$

Задача 36. Измежду числата $1, 2, \ldots, 10^{10}$, кои са повече: тези, чиито запис (в десетична позиционна бройна система) съдържа цифрата 9, или другите, чиито запис не съдържа 9?

Решение. Твърдим, че рекурентното уравнение

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 9T_{n-1} + 10^{n-1}, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

дава броя на числата с не повече от n цифри в десетична бройна система, чиито запис **има поне една** девятка. Аргументацията е, че множеството от тези числа се разбива на три подмножества:

- Тези с не повече от $n-1$ цифри. Те са T_{n-1} на брой.
- Тези с точно n цифри, чиято водеща цифра не е девет. Те са $8T_{n-1}$на брой, защото се получават от числата от T_{n-1} чрез поставяне вляво като водеща цифра на някоя от цифрите $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ и вдясно от нея, записа на числото от T_{n-1}; при това, ако този запис има по-малко от $n-1$ цифри, попълва се с необходимия брой нули между водещата цифра и него, така че общата дължина да стане точно n.
- Тези с точно n цифри, чиято водеща цифра е девет. Това множество има мощност 10^{n-1} по очевидни причини.

Решението на това рекурентно уравнение е $T_n = 10^n - 9^n$.

За $n = 10$ това става $10^{10} - 9^{10} = 6\,513\,215\,599$. Толкова са числата с поне една цифра девет. Тогава тези без нито една цифра девет са $3\,486\,784\,401$, което е значително по-малко. □

Задача 37. Даден е сандък с форма на правоъгълен паралелепипед и с вътрешни размери 20 см на 20 см на $10n$ сантиметра, където n е цяло положително число. Дадени са и неограничено много тухли, всяка с размери 20 см на 20 см на 10 см. Тухлите са неразличими. По колко различни начина, като функция на n, може да бъде напълнен сандъкът плътно с тухли? Иска се да няма никакви празнини между тухлите или около тухлите в сандъка. Не е разрешено да се чупят тухли!

Решение. Ще съставим рекурентно уравнение и ще го решим. Нека S_n е броят на начините да напълним плътно сандъка с тухли. Ако $n = 1$, има място за точно една тухла, така че $S_1 = 1$. Ако $n = 2$, има място за точно две тухли, които са с долепени големи страни и заедно представляват паралелепипедно блокче с размери $20 \times 20 \times 20$. Това блокче може да бъде сложено по три различни начина, така че $S_2 = 3$. Ако $n \geq 3$, нека си представим запълването на сандъка като процес, който запълва сандъка надлъжно, започвайки от единия край.

- Можем да сложим една тухла така, че голямата ѝ страна да е плътно опряна до единия край на сандъка. Това означава, че остава за запълване сандък с дължина $10(n-1)$ см.
- Можем да сложим една тухла легнала, като една от малките ѝ страни е плътно опряна до единия край на сандъка. Тогава сме длъжни да сложим друга тухла точно върху нея, инак би се получила кухина, която няма как да запълним, без да чупим тухли. След слагането на втората тухла, остава за запълване сандък с дължина $10(n-2)$ см.
- Можем да сложим една тухла изправена, като една от малките ѝ страни е плътно опряна до единия край на сандъка, а една от големите ѝ страни е плътно опряна до гърба на сандъка. Тогава сме длъжни да сложим друга тухла точно до нея, инак би се получила кухина, която няма как да запълним, без да чупим тухли. След слагането на втората тухла, остава за запълване сандък с дължина $10(n-2)$ см.

Друг начин да започнем няма, а изброените начини са два по два несъвместими. Съгласно принципа на разбиването, $S_n = S_{n-1} + 2S_{n-2}$ при $n \geq 3$.

В обобщение,

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ 3, & \text{ако } n = 2 \\ S_{n-1} + 2S_{n-2}, & \text{ако } n \geq 3 \end{cases}$$

Това рекурентно уравнение подлежи на решаване с метода с характеристичното уравнение. Решението е

$$S_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3}$$

□

7 Числа на Fibonacci

Числата на Фибоначи се дефинират чрез следното рекурентно уравнение:

$$\begin{aligned} &F_0 = 0 \\ &F_1 = 1 \\ &F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{за } n > 1 \end{aligned}$$

Задача 38. Представете си стълба с n стъпала. Представете си човек, който изкачва стълбата. Той или тя или взема стъпалата едно по едно, или по две стъпала на веднъж, но не повече. Открийте връзка между броя на различните начини този човек да изкачи стълбата и числата на Фибоначи и докажете тази връзка.

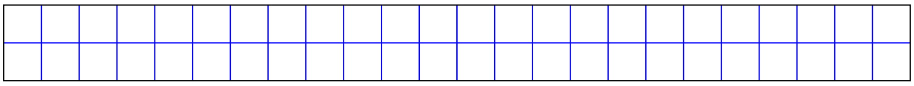
Решение. Нека броят начини да изкачи стълба с n стъпала е S_n. Ще докажем по индукция, че $S_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$.

Ако стъпалото е само едно, има един начин да качи стълбата. Ако стъпалата са две, има два начина: или с две малки стъпки (от по едно стъпало), или с една голяма крачка (две стъпала наведнъж). Така че $S_1 = 1$ и $S_2 = 2$. Но $F_2 = 1$ и $F_3 = 2$, така че $S_1 = F_2$ и $S_2 = F_3$. Това е базата на доказателството.

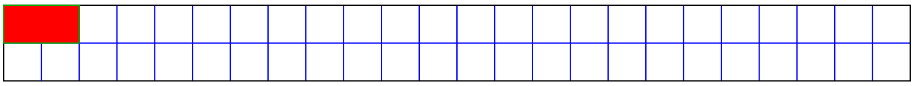
Допускаме, че за някое $n \geq 2$ е вярно, че $S_{n-1} = F_n$ и $S_{n-2} = F_{n-1}$. Ще докажем, че $S_n = F_{n+1}$. При повече от едно стъпало, може да започне или с една малка крачка, при което ще остават $n - 1$ стъпала, които може да се изкачат по S_{n-1} начина, или с една голяма крачка от две стъпала, при което ще остават $n - 2$ стъпала, които може да се изкачат по S_{n-2} начина. Очевидно множеството от изкачванията се разбива на две подмножества: тези, които започват с малка стъпка, и тези, които започват с голяма крачка. По принципа на разбиването, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Тъй като допуснахме, че $S_{n-1} = F_n$ и $S_{n-2} = F_{n-1}$, то следва, че $S_n = F_n + F_{n-1}$. Но $F_n + F_{n-1}$ е равно на F_{n+1}. Тогава $S_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$. □

Задача 39. Представете си правоъгълник $2 \times n$ сантиметра и n на брой малки правоъгълничета 1×2 сантиметра. Покриване на големия правоъгълник с малките правоъгълничета е всяко тяхно слагане върху големия правоъгълник, такова че нито те се припокриват, нито остава непокрита част от големия правоъгълник. Очевидно броя на малките правоъгълничета е достатъчна, за да покрием големия. Нещо повече, начините за покриване на големия са много, ако n е голямо число. Каква е връзката между начините да бъде покрит големия правоъгълник и числата на Фибоначи?

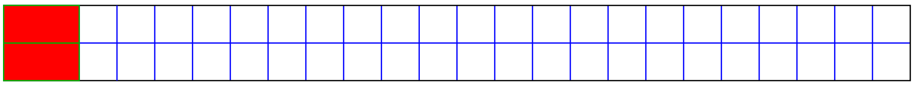
Решение. Нека броят на тези покривания е C_n. Да си представим големия правоъгълник нарисуван хоризонтално и покрит с квадратчета 1×1:



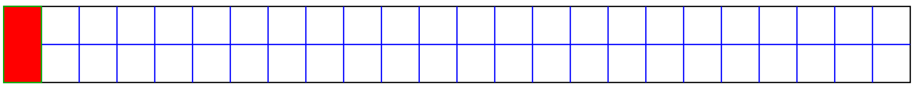
Всяко от покриващите правоъгълничета трябва да покрие точно две съседни (с обща страна) квадратчета. Да си представим, че покриването започва отляво. Квадратчето в горния лав ъгъл трябва да бъде покрито. Има точно два начина да стане това. При първия начин:



трябва задължително да продължим така:



и свеждаме задачата до задача за покриване на правоъгълник $2 \times (n-2)$. При втория начин:



свеждаме задачата до задача за покриване на правоъгълник $2 \times (n-1)$. Доказахме, че за всички достатъчно големи стойности на n, $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$. Очевидно $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$.

Виждаме, че $C_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$. □

Задача 40. Докажете, че

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n}$$

Решение. Ще докажем тъждеството с комбинаторни разсъждения. Нека T_n е броят на всички булеви вектори с дължина n, в които няма съседни единици. Ще покажем, че $T_n = F_{n+2}$ за всяко $n \geq 1$. Очевидно $T_1 = 2$, а $T_2 = 3$, защото от четирите булеви вектора с дължина 2, точно 11 не отговаря на условието.

За $n > 2$, съобразяваме, че всеки такъв вектор може да започва с единица, но тогава вторият му елемент задължително е нула и следва булев вектор с дължина $n-2$ без съседни единици, или да започва с нула, като след нея има булев вектор с дължина $n-1$ без съседни единици. По принципа на разбиването, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$. Доказахме, че $T_n = F_{n+2}$ за всяко $n \geq 1$.

Тогава F_{n+1} е T_{n-1}, така че лявата страна на тъждеството брои булевите вектори с дължина $n-1$ без съседни единици. Ще покажем, че дясната страна брои същото множество, но по-подробно. Но Задача 6 ни казва колко булеви вектори с дължина n нямат съседни единици. Ако заместим n с $n-1$ в (2), ще получим точно дясната страна на тъждеството, което доказваме. □