Примерно решение на домашно №4 по Дискретни Структури, специалност КН, I курс, I и II поток.

Зад. 1 Докажете *чрез еквивалентни преобразувания*, че следните две формули са еквивалентни:

$$U = (x \downarrow \overline{y}) \to (\overline{x}\, z \to ((\overline{x} \,|\, (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \oplus z)))$$
$$V = ((x \to y) \,|\, (x \downarrow (y\, \overline{z}))) \vee \overline{yz}$$

Можете да използвате само следните еквивалентни преорбазувания наготово:

- Свойствата на булевите функции на страница 206 в учебника.
- Свойството на импликацията $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$.
- Свойството на стрелката на Пърс $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$.
- Свойството на чертата на Шефер $x_1 \,|\, x_2 = \overline{x_1 x_2}$.
- Свойството слепване на страница 207 в учебника, а именно $f\, x \vee f\, \overline{x} = f$.
- Свойството поглъщане на страница 207 в учебника, а именно $f\, g \vee f = f$.
- $p \equiv q = \overline{p \oplus q}$.
- $p \oplus q = \overline{p}\, q \vee p\, \overline{q}$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
U &= (x \downarrow \overline{y}) \to (\overline{x}\, z \to ((\overline{x} \,|\, (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \oplus z))) = && \text{(св-ва на импликацията)}\\
&= \overline{x \downarrow \overline{y}} \vee (\overline{x}\, z \to ((\overline{x} \,|\, (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \oplus z))) = && \text{(св-ва на импликацията)}\\
&= \overline{x \downarrow \overline{y}} \vee \overline{\overline{x}\, z} \vee (\overline{x} \,|\, (y \equiv z)) \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(св-ва на стрел. на Пърс и чертата на Шефер)}\\
&= \overline{\overline{x \vee \overline{y}}} \vee \overline{\overline{x}\, z} \vee \overline{\overline{x}(y \equiv z)} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(двойно отрицание)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{x}\, z} \vee \overline{\overline{x}(y \equiv z)} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(закони на Де Морган)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{z} \vee \overline{\overline{x}} \vee \overline{(y \equiv z)} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(двойно отрицание)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee x \vee \overline{z} \vee x \vee \overline{(y \equiv z)} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(комутативност на дизюнкцията)}\\
&= x \vee x \vee x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{(y \equiv z)} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(идемпотентност на дизюнкцията)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{(y \equiv z)} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(свойство на функцията еквивалентност)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{\overline{y \oplus z}} \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(двойно отрицание)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee (y \oplus z) \vee (\overline{xy} \oplus z)) = && \text{(ствойство на сумата по модул две)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{y}z \vee y\overline{z} \vee \overline{\overline{xy}}z \vee \overline{xy}\, \overline{z} = && \text{(двойно отрицание)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{y}z \vee y\overline{z} \vee xyz \vee \overline{xy}\, \overline{z} = && \text{(комутативност на дизюнкцията)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{y}z \vee \overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{xy}\, \overline{z} \vee xyz = && \text{(поглъщане)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{xy}\, \overline{z} \vee xyz = && \text{(поглъщане)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee \overline{xy}\, \overline{z} \vee xyz = && \text{(поглъщане)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee xyz = && \text{(комутативност на дизюнкцията)}\\
&= x \vee xyz \vee \overline{y} \vee \overline{z} = && \text{(поглъщане)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
V &= ((x \to y) \,|\, (x \downarrow (y\,\overline{z}))) \vee \overline{yz} = && \text{(свойство на чертата на Шефер)}\\
&= \overline{(x \to y)(x \downarrow (y\,\overline{z}))} \vee \overline{yz} = && \text{(закони на Де Морган)}\\
&= \overline{x \to y} \vee \overline{x \downarrow (y\,\overline{z})} \vee \overline{yz} = && \text{(свойство на импликацията)}\\
&= \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{x \downarrow (y\,\overline{z})} \vee \overline{yz} = && \text{(закони на Де Морган)}\\
&= \overline{\overline{x}}\,\overline{y} \vee \overline{x \downarrow (y\,\overline{z})} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = && \text{(двойно отрицание)}\\
&= x\,\overline{y} \vee \overline{x \downarrow (y\,\overline{z})} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = && \text{(свойство на стрелката на Пърс)}\\
&= x\,\overline{y} \vee \overline{\overline{x \vee y\,\overline{z}}} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = && \text{(двойно отрицание)}\\
&= x \vee x\,\overline{y} \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee y\,\overline{z} = && \text{(поглъщане)}\\
&= x \vee \overline{y} \vee \overline{z}
\end{aligned}$$

Показахме, че U и V са еквивалентни. □

Зад. 2 Напишете съвършената дизюнктивна нормална форма на булевата функция на три променливи $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

Решение: Стълбът на функцията е

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Съвършената дизюнктивна нормална форма е

$$\overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,z$$

□

Зад. 3 Напишете съвършената конюнктивна нормална форма на булевата функция на три променливи $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

Решение: Съвършената конюнктивна нормална форма е

$$(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$$

□

Зад. 4 Напишете полинома на Жегалкин булевата функция на три променливи $f(x, y, z) = (x \to y) \to z$.

Решение: Може да получим полинома чрез еквивалентни преобразувания:

$$\begin{aligned}
(x \to y) \to z &= \overline{\overline{x} \vee y} \vee z \\
&= \overline{\overline{x}}\, \overline{y} \vee z \\
&= x\, \overline{y} \vee z \\
&= \overline{\overline{x\, \overline{y} \vee z}} \\
&= 1 \oplus \overline{x\,(1 \oplus y) \vee z} \\
&= 1 \oplus (\overline{x \oplus xy}\; \overline{z}) \\
&= 1 \oplus (1 \oplus x \oplus xy)(1 \oplus z) \\
&= 1 \oplus 1 \oplus z \oplus x \oplus xz \oplus xy \oplus xyz \\
&= x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz
\end{aligned}$$

□

Зад. 5 Докажете, че във всяка симетрична булева функция, различна от константа, всяка променлива е съществена.

Решение: Удобно е да мислим за векторите на J_2^n като за върховете на хиперкуба B^n. Всяка булева функция от $\mathcal{F}_2^n$ е "раздаване" на нули и единици на върховете на хиперкуба. Симетричните функции са точно тези, за които всички върхове от даден слой получават или само нули, или само единици.

Първо ще докажем едно помощно твърдение: ако дадена функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ има променлива, която не е съществена, тогава за всеки два съседни слоя на хиперкуба B_k^n, B_{k+1}^n, $0 \leq k \leq n-1$, е вярно, че има връх u от B_k^n и връх v от B_{k+1}^n, такива че $f(u) = f(v)$. Нека x_i е несъществена променлива. По дефиниция това означава, че

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

за всички възможни стойности на $n-1$-мерният вектор $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$. Да разгледаме коя да стойност на този вектор, да я наречем α, която има точно k единици. Нека u е n-мерният вектор, получен от α чрез вмъкване на нула между x_{i-1} и x_{i+1}, а v е n-мерният вектор, получен от α чрез вмъкване на единица между x_{i-1} и x_{i+1}. Тогава $f(u) = f(v)$ и очевидно $u \in B_k^n$ и $v \in B_{k+1}^n$.

Да се върнем към доказателството на оригиналното твърдение. Нека f е симетрична функция, различна от константа. Щом f не е константа, съществуват два вектора $\alpha, \beta \in J_2^n$, такива че $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Щом f е симетрична, тези α и β не са с еднакво тегло. Нека α има тегло k и β има тегло m, $k \neq m$. Без ограничения на общността, нека $f(\alpha) = 0$ (тогава $f(\beta) = 1$) и $k < m$. Да си представим последователността от слоеве на хиперкуба B_k^n, B_{k+1}^n, $\ldots$, B_m^n. В рамките на всеки един от тях, стойността на f е една и съща, като върху B_k^n тя е 0, а върху B_m^n, тя е 1. Тогава съществуват съседни слоеве в тази последователност, да ги наречем B_i^n и B_{i+1}^n, където $k \leq i < m$, такива че f върху B_i^n е 0 и B_{i+1}^n е 1. Ако допуснем, че f има поне една несъществена променлива, съгласно доказаното в предния параграф има вектори $w \in B_i^n$ и $z \in B_{i+1}^n$, такива че $f(w) = f(z)$, което директно противоречи на извода, че f върху B_i^n е 0 и B_{i+1}^n е 1. □

Зад. 6, бонус Дадени са множествата $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$, $C = \{c_1, c_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$ и $E = \{e_1, e_2\}$. Да ги наречем *домейните*. Колко са релациите от вида $R \subseteq A \times B \times C \times D \times E$? За колко от тях е изпълнено, че за всеки домейн, всеки негов елемент се среща в поне един елемент на релацията? И на двата въпроса от Вас се очаква да дадете отговор-формула, който да бъде добре обоснован, последван от отговор-число. Ако имате правилен отговор-формула, даването на числен отговор е тривиално. Можете да използвате обикновен калкулатор или какъвто и да е софтуер, за да получите числата.

Решение: Всички възможни релации са 2^{2^5}. Елементите на $A \times B \times C \times D \times E$ са 2^5, и всеки от тях може да присъства или да не присъства в релацията независимо от другите. Друг начин да се изведе резултатът е наблюдението, че съществува очевидна биекция между булевите функции на пет променливи и въпросните релации. Численият отговор е $4\,294\,967\,296$.

За да получим втория отговор, от този брой ще извадим броя на релациите, които не съдържат поне един елемент от поне един домейн. Това ще сторим съгласно метода на включването и изключването, като универсумът U ще е не множеството от всички релации, а всички без празната. Следователно, $|U| = 2^{2^5} - 1$. Нека T_A е множеството от тези непразни релации, които не съдържат поне един символ от A, T_B е множеството от тези непразни релации, които не съдържат поне един символ от B, и така нататък. Ние търсим $\left|\overline{T_A} \cap \overline{T_B} \cap \overline{T_C} \cap \overline{T_D} \cap \overline{T_E}\right|$. Съгласно принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
\left|\overline{T_A} \cap \overline{T_B} \cap \overline{T_C} \cap \overline{T_D} \cap \overline{T_E}\right| = |U| &- (|T_A| + |T_B| + |T_C| + |T_D| + |T_E|)\\
&+ (|T_A \cap T_B| + |T_A \cap T_C| + |T_A \cap T_D| + |T_A \cap T_E| + \ldots + |T_D \cap T_E|)\\
&- (|T_A \cap T_B \cap T_C| + \ldots + |T_C \cap T_D \cap T_E|)\\
&+ (|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D| + \ldots + |T_B + T_C + T_D + T_E|)\\
&- |T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E|
\end{aligned}$$

От общи съображения е ясно, че във всяка от сумите в скоби събираемите са равни, така че

$$\begin{aligned}
\left|\overline{T_A} \cap \overline{T_B} \cap \overline{T_C} \cap \overline{T_D} \cap \overline{T_E}\right| = |U| &- \binom{5}{1}|T_A|\\
&+ \binom{5}{2}|T_A \cap T_B|\\
&- \binom{5}{3}|T_A \cap T_B \cap T_C|\\
&+ \binom{5}{4}|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D|\\
&- \binom{5}{5}|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E|
\end{aligned}$$

Да намерим $|T_A|$. Тъй като разглеждаме непразните релации над петте домейна, поне един елемент от A присъства във всеки елемент от коя да е от разглежданите релации. Следователно търсим броя на релациите, в които присъства точно един от $\{a_1, a_2\}$. Всички непразни релации, в които като представител на A е само a_1 са $2^{2^4} - 1$. Аналогично, всички непразни релации, в които като представител на A е само a_2 са $2^{2^4} - 1$. Тези множества нямат общи елементи, следователно по принципа на разбиването, $|T_A| = 2^{2^4} - 1 + 2^{2^4} - 1 = 2^1\left(2^{2^4} - 1\right)$.

Да намерим $|T_A \cap T_B|$. С аналогични разсъждения стигаме до извода, че като представител на A присъства точно един от $\{a_1, a_2\}$, а като представител на B, точно един от $\{b_1, b_2\}$. Това дава общо четири възможности за това, които представители на A и B се срещат. За всяка от тях, непразните релации са $2^{2^3} - 1$. Следователно, $|T_A \cap T_B| = 2^2\left(2^{2^3} - 1\right)$.

С аналогични разсъждения, $|T_A \cap T_B \cap T_C| = 2^3\left(2^{2^2} - 1\right)$, $|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D| = 2^4\left(2^{2^1} - 1\right)$ и $|T_A \cap T_B \cap T_C \cap T_D \cap T_E| = 2^5\left(2^{2^0} - 1\right)$. За проверка, последният израз е 2^5, което е точният брой на непразните релации, несъдържащи точно един елемент от всеки домейн.

И така, отговорът-формула е

$$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} 2^k \left(2^{2^{5-k}} - 1\right)$$

Отговорът-число е $4\,294\,321\,153$. Той може да се получи лесно с джобен калкулатор, но може да се използва и специализиран софтуерен пакет, примерно Maple с командата

```
sum((-1)^k*binomial(5, k)*2^k*(2^(2^(5-k))-1), k = 0 .. 5);
```

□