

1 Една полезна формула

Нека $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено (и ограничено). На гладка функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ с координатни функции $u_1, \dots, u_n$ можем да съпоставим еднозначно диференциална $n - 1$ -форма в Ω ,

$$\mathcal{D}u(x) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} u_i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Аналогично, на диференциална n -форма

$$\omega = g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

в Ω , можем еднозначно да съпоставим функцията $\mathcal{E}\omega := g$. Така, за функция $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ можем да дефинираме

$$\operatorname{div} u := (\mathcal{E} \circ d \circ \mathcal{D})u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

(тук d е външната производна). Директно пресмятане показва, че

$$\operatorname{div} u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x^i}(x)$$

(именно затова ни трябваха странните знаци в дефиницията на $\mathcal{D}$).

Твърдение 1.1. Нека $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Тогава съществува $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, такова, че

$$\operatorname{div} v(x) = \operatorname{div} w(f(x)) \cdot J_f(x).$$

При това, ако f може да се продължи непрекъснато до $\bar{\Omega}$ и $\operatorname{supp} w \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$, то можем да изберем v , така че $\operatorname{supp} v \subset \Omega$.

Доказателство. Дефинираме

$$v := \mathcal{D}^{-1}(f^*(\mathcal{D}w)).$$

Да отбележим, че от правилото за издърпване на диференциални n -форми получаваме, че $\mathcal{E}(f^*\omega)(x) = \mathcal{E}\omega(f(x)) \cdot J_f(x)$. Тогава

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v(x) &= \mathcal{E} \circ d \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{-1}(f^*(\mathcal{D}w(x))) = \mathcal{E} \circ d(f^*(\mathcal{D}w(x))) = \mathcal{E}(f^*(d(\mathcal{D}w(x)))) \\ &= \mathcal{E}(d(\mathcal{D}w(f(x)))) \cdot J_f(x) = \operatorname{div} w(f(x)) \cdot J_f(x), \end{aligned}$$

като в последното равенство на първия ред използвахме, че d комутира с издърпването. Дефиницията на v показва, че $\operatorname{supp} v \subseteq \operatorname{supp} w \circ f = f^{-1}(\operatorname{supp} w)$. Тогава

$$\operatorname{supp} v \cap \partial\Omega \subseteq f^{-1}(\operatorname{supp} w) \cap \partial\Omega \subseteq f^{-1}(\operatorname{supp} w \cap f(\partial\Omega)) = \emptyset,$$

откъдето следва, че $\operatorname{supp} v \subseteq \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega = \Omega$. □

Коментар. Цялото доказателство е едно превеждане от един език на друг (чрез $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$). Това превеждане всъщност би било ненужно, ако поначало, в Proposition 2.1, напишем формулата във вида

$$d(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} f^*(\varphi_\varepsilon(z - y) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n).$$

Тогава, използвайки представянето $\varphi_\varepsilon(z - y^2) - \varphi_\varepsilon(z - y^1) = \operatorname{div} w(z)$ (което Deimling е извел директно), имаме, че

$$(\varphi_\varepsilon(z - y^2) - \varphi_\varepsilon(z - y^1)) dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n = dw$$

за някоя $n - 1$ -форма ω , такава че $\operatorname{supp} \omega \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$. Така

$$d(f, \Omega, y^1) - d(f, \Omega, y^2) = \int_{\Omega} f^*(dw) = \int_{\Omega} d(f^*\omega) = \int_{\partial\Omega} f^*\omega = 0,$$

където използвахме формулата на Стокс и това, че $f^*\omega$ се нулира върху $\partial\Omega$. (има лек технически проблем с това, че границата на Ω може да не е гладка, но той може да се преодолее).