

Задача 1. Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е отворено и ограничено множество с $0 \in \Omega$, $f \in C(\bar{\Omega})$ и $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ за всяко $x \in \partial\Omega$. Да се докаже, че f има нула в $\bar{\Omega}$.

Задача 2. Нека Ω е отвореното единично кълбо в $\mathbb{R}^n$, а $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекъснатата и такава, че $f(x) \neq x$ за всяко $x \in \bar{\Omega}$. Да се докаже, че съществува $\lambda > 1$ и $x \in \partial\Omega$, такива че $f(x) = \lambda x$.

Коментар. Използвайте предишната задача, за да покажете следното усилване на теоремата на Брауер за неподвижната точка, когато функцията е дефинирана в кълбо.

Задача 3. Нека Ω е отвореното единично кълбо в $\mathbb{R}^n$, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекъснатата и $f(\partial\Omega) \subseteq \bar{\Omega}$. Да се докаже, че съществува $x \in \bar{\Omega}$, такова че $f(x) = x$.

Коментар. Помислете за пример, който показва, че предположенията в последната задача наистина са по-слаби от предположенията в теоремата на Брауер.

Задача 4. Нека $\Omega = B_1(0)$ и $f \in C(\bar{\Omega})$. Известно е, че $\|f(x) - x\| < 1$ за всяко $x \in \partial\Omega$. Докажете, че f има нула в Ω .