

ДОМАШНО № 1 ПО ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ НА СПЕЦИАЛНОСТ ИНФОРМАТИКА,
ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР 2024/2025Г., 17. МАРТ 2025 Г.

Краен срок за предаване: 25. март 2025г., 23ч 59м.
Предаването е само в електронен вид в мундъл.

Име: Ф№: Група: ..

Задача	1	2	3	4	5 (Бонус)	Макс.
получени точки						
от максимално	25	25	25	25	25	100

Задача 1. Една двойка $\langle A, R \rangle$ ще наричаме **линейно наредено множество (л.н.м.)**, ако $R \subseteq A \times A$ и R е релация на линейна наредба върху A . Нека е дадено $\mathcal{A} := \langle A, \leq \rangle$ е л.н.м. и нека $<$ е строгият вариант на (частичната) наредба $\leq$, (т.е. $<$ е равно (множествено) на $\leq \setminus \{(a, a) \mid a \in A\}$).

Едно множество $B \subseteq A$ ще наричаме **гъсто**, ако $|B| \geq 2$ и:

$$\forall x \in B: \forall y \in B: \exists z \in B: (x < y \Rightarrow x < z \wedge z < y)$$

Едно множество $B \subseteq A$ ще наричаме **разредено**, ако:

$$\forall C \subseteq B: (C \text{ не е гъсто})$$

Дефинираме $I(a, b) := \{x \in A \mid (a \leq x \wedge x \leq b) \vee (b \leq x \wedge x \leq a)\}$ - затворен интервал в A .

Дефинираме релацията $\sim \subseteq A \times A$ по следния начин:

$$a \sim b \Leftrightarrow I(a, b) \text{ е разредено, } \forall a, b \in A.$$

- (i) Да се докаже, че $\sim$ е релация на еквивалентност върху A .
- (ii) Да се докаже, че класовете на еквивалентност на $\sim$ са разредени множества.
- (iii) Да се докаже, че ако $[a]_{\sim}, [b]_{\sim}$ са два различни еквивалентни класа на $\sim$ ($a, b \in A$), то:

$$(\forall x \in [a]_{\sim} : \forall y \in [b]_{\sim} : (x < y)) \vee (\forall x \in [a]_{\sim} : \forall y \in [b]_{\sim} : (y < x)).$$

- (iv) Нека разгледаме конкретно л.н.м. $A \subset \mathbb{R}$ (свс стандартната линейна наредба):

$$\begin{aligned} A := & (-\infty, -10] \cup \left\{ \frac{1-10n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{-9.e^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \\ & \cup \{0\} \cup \left\{ \frac{2}{1+e^{-n}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup [2, 3] \cup \{3.5\} \cup [4, 10] \cup (10, 26] \cup \\ & \cup \{n^3 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}. \end{aligned}$$

Да се определи и докаже точно как изглежда разбиването $A / \sim$.

Решение: (1) Нека $a \in A$ - произволно.

$$I(a, a) = \{a\} \Rightarrow |I(a, a)| < 2 \Rightarrow \neg \exists C \subseteq I(a, a) : (C \text{ е гъсто}) \\ \Rightarrow I(a, a) \text{ е разредено} \Rightarrow a \sim a$$

Но a беше произволно $\Rightarrow \sim$ - рефлексивна.

(2) Нека $a, b \in A$ - произволни.

$$(a \leq x \wedge x \leq b) \vee (b \leq x \wedge x \leq a) \stackrel{\vee\text{-КОМУТ.}}{\equiv} (b \leq x \wedge x \leq a) \vee (a \leq x \wedge x \leq b) \\ \Rightarrow I(a, b) = I(b, a) \Rightarrow (I(a, b) \text{ е разредено}) \equiv (I(b, a) \text{ е разредено}) \\ \Rightarrow a \sim b \equiv b \sim a$$

Но a и b бяха произволни $\Rightarrow \sim$ - симетрична.

(3) **Твърдение:** Ако $C \subseteq A$ и $|C| = 2$, то C не е гъсто, а е разредено.

Доказателство: Щом $|C| = 2$, то $C = \{a, b\}$. **Б.О.О.** $a < b$. Да допуснем противното, т.е. C е гъсто.

$$\exists z \in C : (a < z \wedge z < b) \Rightarrow (z \neq a \wedge z \neq b \wedge z \in C) \Rightarrow \perp \\ \Rightarrow C \text{ не е гъсто.}$$

Сега, всички собствени подмножества на C (т.е. $\neq C$) са с кардиналност $\leq 1 \stackrel{\Delta}{\Rightarrow}$ не са гъсти. От тук (и от C - не е гъсто), C е разредено.

(Тук забелязваме, че въпреки че в дефиницията на гъсто множество има изискване кардиналността му да е ≥ 2 , няма гъсто множество с кардиналност $= 2$. Това изискване е по скоро да забрани множества с кардиналност < 2 да са гъсти, понеже за тях antecedentът на импликацията в другото условие (т.е. $x < y$) ще е грешен, и от там и цялото друго условие ще е вярно.)

(4) **Твърдение:** Ако $P, Q \subseteq A$ са разредени, то и $P \cup Q$ също е разредено.

Доказателство: Нека $C \subseteq P \cup Q$ е произволно подмножество на $P \cup Q$.

$$\Rightarrow C = (C \cap P) \cup (C \cap Q), \text{ където } C \cap P \subseteq P \text{ и } C \cap Q \subseteq Q \\ \Rightarrow C \cap P \text{ и } C \cap Q \text{ не са гъсти (като подмножества на разредени).}$$

I сл. $C \cap P$ и $C \cap Q$ са с мощност < 2 . $\Rightarrow C \cap P$ и $C \cap Q$ са с мощност ≤ 1 .

$$\Rightarrow |C| = |(C \cap P) \cup (C \cap Q)| \leq |(C \cap P)| + |(C \cap Q)| \leq 1 + 1 = 2$$

$$\text{Ако } |C| < 2 \stackrel{\Delta}{\Rightarrow} C \text{ не е гъсто. } \checkmark$$

$$\text{Ако } |C| = 2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} C \text{ не е гъсто. } \checkmark$$

II сл. Поне едното от $C \cap P$ и $C \cap Q$ е с мощност ≥ 2 . **Б.О.О.** нека това е $C \cap P$.

$$\stackrel{\Delta}{\Rightarrow} \exists a, b \in C \cap P, a < b : \neg \exists c \in C \cap P : (a < c \wedge c < b)$$

$$\Rightarrow \exists a, b \in C, a < b : \neg \exists c \in C \cap P : (a < c \wedge c < b)$$

$$\Rightarrow C \text{ не е гъсто. } \checkmark$$

Но C беше произволно подмножество на обединението $\Rightarrow P \cup Q$ е разредено.

(5) Нека $a, b, c \in A$ - произволни и $a \sim b, b \sim c$.

I сл. $a = b. \Rightarrow I(a, c) = I(b, c)$ - разредено. ✓

II сл. $b = c. \Rightarrow I(a, c) = I(a, b)$ - разредено. ✓

III сл. $a = c. \Rightarrow I(a, c) = \{a\}$ - разредено. ✓

IV сл. $a \neq b, b \neq c, c \neq a.$

$$I(a, c) = \begin{cases} I(a, b) \cup I(b, c), & \text{ако } a < b < c \text{ или } c < b < a \\ I(a, b), & \text{ако } a < c < b \text{ или } b < c < a \\ I(b, c), & \text{ако } b < a < c \text{ или } c < a < b \end{cases}$$

$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} I(a, c)$ е разредено. ✓

$\Leftrightarrow a \sim c$. Но a, b и c бяха произволни $\Rightarrow \sim$ - транзитивна.

(6) От (1), (2) и (5) $\Rightarrow \sim$ е релация на еквивалентност ((i) - доказано).

(7) **Твърдение:** Ако $P \subseteq A$ е разредено и $Q \subseteq P$, то и Q е разредено.

Доказателство:

$(P - \text{разредено}) \equiv \forall C \subseteq P: (C - \text{не е гъсто})$

$\Rightarrow \forall C \subseteq Q \subseteq P: (C - \text{не е гъсто})$

$\Rightarrow Q$ е разредено.

(8) **Твърдение:** Нека $C \subseteq A$ и дефинираме:

$$I_C(a, b) := I(a, b) \cap C = \{x \in C \mid a \leq x \wedge x \leq b\}.$$

Ако C е гъсто, то $\forall c, d \in C, c < d: (I_C(c, d))$ е гъсто).

Доказателство: Нека фиксираме произволни $c, d \in C, c < d$.

$(C - \text{гъсто}) \equiv \forall x, y \in C, x < y: \exists z \in C: (x < z \wedge z < y) \quad // \Rightarrow z \in I_C(c, d)$

$\Rightarrow \forall x, y \in C, x < y: \exists z \in I_C(c, d): (x < z \wedge z < y)$

$\Rightarrow \forall x, y \in I_C(c, d) \subseteq C, x < y: \exists z \in I_C(c, d): (x < z \wedge z < y)$

Освен това, $c, d \in I_C(c, d)$ и $c < d$, по-специфично $c \neq d \Rightarrow |I_C(c, d)| \geq 2$.
Следователно, $I_C(c, d)$ е гъсто.

(9) **Твърдение:** $\forall C \subseteq A: \neg((C - \text{гъсто}) \wedge (C - \text{разредено}))$.

Доказателство: По дефиниция, C е разредено, точно когато всяко негово подмножество не е гъсто. Това включва и самото C .

Тоест $(C - \text{разредено}) \rightarrow (C - \text{не е гъсто})$. От тук лесно се вижда, че няма как едно множество да е едновременно гъсто и разредено.

(10) За (ii): Нека $a \in A$ - произволно. Да допуснем противното, т.е. $[a]_{\sim}$ - не е разредено. $\Leftrightarrow \exists C \subseteq [a]_{\sim}: (C \text{ е гъсто})$.

Нека $b, c \in C, b < c. \stackrel{(8)}{\Rightarrow} I_C(b, c)$ е гъсто.

Но $b, c \in C \subseteq [a]_{\sim} \Rightarrow b \sim c \Leftrightarrow I(b, c)$ е разредено

$\stackrel{(7)}{\Rightarrow} I_C(b, c)$ е разредено, понеже $I_C(b, c) \subseteq I(b, c)$.

$\Rightarrow I_C(b, c)$ е гъсто и разредено. $\stackrel{(9)}{\Rightarrow} \perp$

$\Rightarrow [a]_{\sim}$ е разредено.

Но a беше произволно $\Rightarrow$ Всички класове на еквивалентност са разредени. ((ii) - доказано).

(11) За (iii): Да допуснем противното, т.е.:

$$\exists a, b \in A, [a]_{\sim} \neq [b]_{\sim} : \exists x, y \in [a]_{\sim}, x < y : \exists z \in [b]_{\sim} : (x < z \wedge z < y)$$

$z \in I(x, y)$ - разредено $\stackrel{(7)}{\Rightarrow} I(x, z)$ е разредено, понеже $I(x, z) \subseteq I(x, y)$

$\Leftrightarrow x \sim z \Rightarrow [b]_{\sim} = [z]_{\sim} = [x]_{\sim} = [a]_{\sim}$, но допуснахме, че $[a]_{\sim} \neq [b]_{\sim} \Rightarrow \perp$

$$\Rightarrow \forall a, b \in A, [a]_{\sim} \neq [b]_{\sim} : ((\forall x \in [a]_{\sim} : \forall y \in [b]_{\sim} : (x < y)) \vee (\forall x \in [a]_{\sim} : \forall y \in [b]_{\sim} : (y < x)))$$

((iii) - доказано)

(С това показахме че класовете на еквивалентност са интервали върху които можем да индуцираме линейна наредба от $\leq$ върху A .)

(12) От (8) и (9) става ясно, че ако $I(a, b)$ е гъсто, то:

$$\forall c, d \in I(a, b), c < d : (I_C(c, d) = I(c, d) \text{ не е разредено}).$$

От това пък следва: $\forall c, d \in I(a, b) : (c \sim d \Leftrightarrow c = d)$.

(13) **Лема:** Нека $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ е монотонна редица и $\forall n \in \mathbb{N} : I(a_0, a_{n+1}) = I(a_0, a_n) \cup \{a_{n+1}\}$. Тоест всички елементи на A , които са между елементи на редицата, са елементи на редицата, т.е. редицата е подинтервал на A . Тогава цялата редица принадлежи на един и същ клас на еквивалентност.

Доказателство: Нека $N := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ е опорното множество на редицата. Нека $n \in \mathbb{N} \Rightarrow I(a_n, a_{n+1}) = \{a_n, a_{n+1}\}$ е разредено $\Leftrightarrow a_n \sim a_{n+1}$

Сега по идндукция лесно може да се покаже, че $\forall i, j \in \mathbb{N} : a_i \sim a_j \Rightarrow$ всички членове на редицата принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

(14) **Лема:** Нека $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ е монотонна сходяща редица и $\forall n \in \mathbb{N} : I(a_0, a_{n+1}) = I(a_0, a_n) \cup \{a_{n+1}\}$. Тогава цялата редица и границата ѝ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

Доказателство: Нека $L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

От (13) $\Rightarrow$ всички елементи на редицата са в един клас на еквивалентност. Остава да покажем, че (примерно) $a_0 \sim L$.

Да допуснем противното, т.е. $\neg(a_0 \sim L) \Leftrightarrow (I(a_0, L) \text{ не е разредено})$

Понеже по условие елементите на редицата образуват подинтервал на A , и L , като граница на редицата, е точка на съгъстяване на редицата (т.е. има произволно елементи на редицата произволно близко до L), то $I(a_0, L) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{L\}$

От допускането $\Rightarrow \exists C \subseteq I(a_0, L) : (C \text{ - гъсто}) \Rightarrow |C| \geq 2$

Но в (3) показахме, че не може едно гъсто множество да има само 2 елемента.

$\Rightarrow |C| \geq 3$, но $C \subseteq I(a_0, L) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{L\}$

$\Rightarrow C \setminus \{L\} \subseteq \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $|C \setminus \{L\}| \geq 2$

$\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N}: a_i, a_j \in C \stackrel{(8)}{\Rightarrow} (I_C(a_i, a_j) = I(a_i, a_j) - \text{гъсто})$

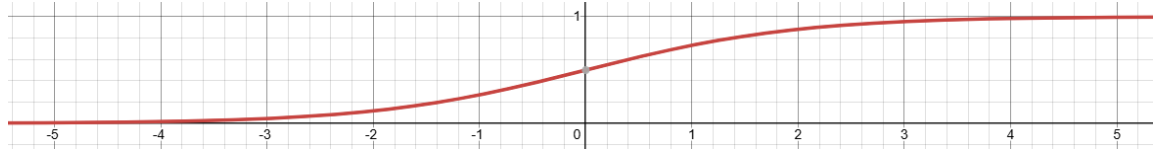
Но от (13) $\Rightarrow (I(a_i, a_j) - \text{разредено}) \Rightarrow \perp$

$\Rightarrow (a_0 \sim L) \Rightarrow$ цялата редица и границата ѝ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

(15) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := e^{-x}$ е намаляваща функция и $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) > 0$. Освен това, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Следователно, $Im(f) = (0, +\infty)$

$\Rightarrow g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) := 1 + f(x)$ е намаляваща функция и $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) > 1$. Освен това, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$. Следователно, $Im(g) = (1, +\infty)$

$\Rightarrow h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) := \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1+e^{-x}}$ е **нарастваща** функция и $\forall x \in \mathbb{R}: 0 < h(x) < 1$. Освен това, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$. Следователно, $Im(h) = (0, 1)$. Тя изглежда така:



(16) Сега вече сме готови да определим класовете на еквивалентност на $\sim$ за конкретното множество:

1) $I(-\infty, -10) = (-\infty, -10]$ - гъст множество $\stackrel{(12)}{\Rightarrow}$ Всичките му елементи са в различни класове на еквивалентност.

2) $I(-10, -9) = \left\{ \frac{1-10 \cdot n}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ -10 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ - опорно множество на строго намаляваща (монотонна) сходяща редица с първи член 9 и граница -10 $\stackrel{(14)}{\Rightarrow}$ цялата редица и границата ѝ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

3) $I(-9, 0) = \{-9 \cdot e^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ - опорно множество на строго нарастваща (монотонна) сходяща редица с първи член -9 и граница 0 $\stackrel{(14)}{\Rightarrow}$ цялата редица и границата ѝ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

4) $I(0, 1) = \{0\} \cup \left\{ \frac{2}{1+e^{-(-n)}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \stackrel{(15)}{-}$ опорно множество на строго намаляваща (монотонна) сходяща редица с начален член $\frac{2}{1+e^0} = 1$ и граница 0 $\stackrel{(14)}{\Rightarrow}$ цялата редица и границата ѝ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

5) $I(1, 2) = \left\{ \frac{2}{1+e^{-n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\} \stackrel{(15)}{-}$ опорно множество на строго нарастваща (монотонна) сходяща редица с начален член $\frac{2}{1+e^0} = 1$ и граница 2 $\stackrel{(14)}{\Rightarrow}$ цялата редица и границата ѝ принадлежат на един и същ клас на еквивалентност.

6) $I(2, 3) = [2, 3]$ - гъсто множество $\stackrel{(12)}{\Rightarrow}$ Всичките му елементи са в различни класове на еквивалентност.

- 7) $I(3, 4) = \{3, 3.5, 4\}$ - разредено множество $\xRightarrow{(ii),(13)}$ всички елементи принадлежат на един клас на еквивалентност.
- 8) $I(4, 26) = [4, 10) \cup (10, 26]$ - гъсто множество $\xRightarrow{(12)}$ Всичките му елементи са в различни класове на еквивалентност.
- 9) $I(26, 27) = \{26, 27\}$ - разредено множество $\xRightarrow{(ii),(13)}$ всички елементи принадлежат на един клас на еквивалентност.
- 10) $I(27, +\infty)$ - опорно множество на строго нарастваща (монотонна) редица с начален член 27 $\xRightarrow{(13)}$ цялата редица принадлежи на един и същ клас на еквивалентност.

Като вземем предвид (iii) (т.е. еквивалентните класове са непресичащи се интервали и са наредени), директно можем да определим разбиването:

$$\begin{aligned}
 A/\sim = & \{\{x\} \mid x \in (-\infty, -10)\} \cup \\
 & \cup \left\{ \{-10\} \cup \left\{ -10 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{-9.e^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \right. \\
 & \cup \left\{ \frac{2}{1+e^{-n}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{2\} \Big\} \\
 & \cup \{\{x\} \mid x \in (2, 3)\} \cup \\
 & \cup \{\{3, 3.5, 4\}\} \cup \\
 & \cup \{\{x\} \mid x \in (4, 10) \cup (10, 26)\} \cup \\
 & \cup \{\{26, 27\}\} \cup \\
 & \cup \{\{n^3 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}\}
 \end{aligned}$$

□

Задача 2. Докажете чрез еквивалентни преобразувания следната еквивалентност:

$$\begin{aligned}
 ((t \wedge p) \rightarrow (((q \vee t) \oplus r) \vee p)) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv \\
 ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge ((t \wedge (\neg r \rightarrow \neg q \vee \neg t)) \rightarrow \neg(p \oplus \neg p))
 \end{aligned}$$

Решение: (0) Нека означим лявата страна на еквивалентността с L и дясната страна с R .

(1) **Твърдение:** $T \oplus y \equiv \neg y$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
 T \oplus y & \equiv & // \text{ св-во на изкл. или} \\
 \neg(T \leftrightarrow y) & \equiv & // \text{ св-во на биимпликацията} \\
 \neg((T \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow T)) & \equiv & // \text{ 2х св-во на импликацията} \\
 \neg((\neg T \vee y) \wedge (\neg y \vee T)) & \equiv & \\
 \neg((F \vee y) \wedge (\neg y \vee T)) & \equiv & // \text{ 2х св-во на константите} \\
 \neg(y \wedge T) & \equiv & // \text{ св-во на константите} \\
 \neg y & &
 \end{aligned}$$

(2) **Твърдение:** $x \leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
x \leftrightarrow y &\equiv && // \text{ св-во на биимпликацията} \\
&\equiv (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \equiv && // \text{ 2х св-во на импликацията} \\
&\equiv (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x) \equiv && // \text{ дистрибутивност} \\
&\equiv ((\neg x \vee y) \wedge \neg y) \vee ((\neg x \vee y) \wedge x) \equiv && // \text{ 2х дистрибутивност} \\
&\equiv ((\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg y)) \vee ((\neg x \wedge x) \vee (y \wedge x)) \equiv && // \text{ 2х св-во на отрицанието} \\
&\equiv ((\neg x \wedge \neg y) \vee F) \vee (F \vee (y \wedge x)) \equiv && // \text{ 2х св-во на константите} \\
&\equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (y \wedge x) \equiv && // \text{ комутативност} \\
&\equiv (y \wedge x) \vee (\neg x \wedge \neg y)
\end{aligned}$$

(3) Да опростим лявата страна:

$$\begin{aligned}
L &\equiv \\
&\equiv ((t \wedge p) \rightarrow (((q \vee t) \oplus r) \vee p)) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ св-во на импликацията} \\
&\equiv (\neg(t \wedge p) \vee (((q \vee t) \oplus r) \vee p)) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ з-н на De Morgan} \\
&\equiv ((\neg t \vee \neg p) \vee (((q \vee t) \oplus r) \vee p)) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ асоциативност} \\
&\equiv (\neg t \vee \neg p \vee ((q \vee t) \oplus r) \vee p) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ комутативност, асоциативност} \\
&\equiv ((\neg p \vee p) \vee (\neg t \vee ((q \vee t) \oplus r))) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ св-во на отрицанието} \\
&\equiv (T \vee (\neg t \vee ((q \vee t) \oplus r))) \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ св-во на константите} \\
&\equiv T \oplus (q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // (1) \\
&\equiv \neg(q \wedge t \rightarrow (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ св-во на импликацията} \\
&\equiv \neg(\neg(q \wedge t) \vee (r \leftrightarrow t)) \equiv && // \text{ з-н на De Morgan} \\
&\equiv \neg\neg(q \wedge t) \wedge \neg(r \leftrightarrow t) \equiv && // \text{ з-н за двойното отрицание} \\
&\equiv (q \wedge t) \wedge \neg(r \leftrightarrow t) \equiv && // \text{ асоциативност, (2)} \\
&\equiv q \wedge t \wedge \neg((r \wedge t) \vee (\neg r \wedge \neg t)) \equiv && // \text{ з-н на De Morgan} \\
&\equiv q \wedge t \wedge (\neg(r \wedge t) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg t)) \equiv && // \text{ асоциативност} \\
&\equiv q \wedge t \wedge \neg(r \wedge t) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg t) \equiv && // \text{ 2х з-н на De Morgan} \\
&\equiv q \wedge t \wedge (\neg r \vee \neg t) \wedge (\neg\neg r \vee \neg\neg t) \equiv && // \text{ 2х з-н за двойното отрицание} \\
&\equiv q \wedge t \wedge (\neg r \vee \neg t) \wedge (r \vee t) \equiv && // \text{ комутативност, асоциативност} \\
&\equiv (t \wedge (t \vee r)) \wedge q \wedge (\neg r \vee \neg t) \equiv && // \text{ поглъщане} \\
&\equiv t \wedge q \wedge (\neg r \vee \neg t) \equiv && // \text{ комутативност, асоциативност} \\
&\equiv (t \wedge (\neg r \vee \neg t)) \wedge q \equiv && // \text{ дистрибутивност} \\
&\equiv ((t \wedge \neg r) \vee (t \wedge \neg t)) \wedge q \equiv && // \text{ св-во на отрицанието} \\
&\equiv ((t \wedge \neg r) \vee F) \wedge q \equiv && // \text{ св-во на константите} \\
&\equiv (t \wedge \neg r) \wedge q \equiv && // \text{ асоциативност, комутативност} \\
&\equiv t \wedge q \wedge \neg r
\end{aligned}$$

(4) **Твърдение:** $x \oplus \neg x \equiv T$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
x \oplus \neg x &\equiv && // \text{ св-во на изкл. или} \\
&\equiv \neg(x \leftrightarrow \neg x) \equiv && // \text{ св-во на биимпликацията} \\
&\equiv \neg((x \rightarrow \neg x) \wedge (\neg x \rightarrow x)) \equiv && // \text{ 2х св-во на импликацията} \\
&\equiv \neg((\neg x \vee \neg x) \wedge (\neg \neg x \vee x)) \equiv && // \text{ з-н за двойното отрицание} \\
&\equiv \neg((\neg x \vee \neg x) \wedge (x \vee x)) \equiv && // \text{ 2х идемпотентност} \\
&\equiv \neg(\neg x \wedge x) \equiv && // \text{ св-во на константите} \\
&\equiv \neg F \equiv T
\end{aligned}$$

(5) Да опростим дясната страна:

$$\begin{aligned}
R &\equiv \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge ((t \wedge (\neg r \rightarrow \neg q \vee \neg t)) \rightarrow \neg(p \oplus \neg p)) \equiv && // (4) \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge ((t \wedge (\neg r \rightarrow \neg q \vee \neg t)) \rightarrow \neg T) \equiv \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge ((t \wedge (\neg r \rightarrow \neg q \vee \neg t)) \rightarrow F) \equiv && // \text{ з-н на De Morgan} \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge ((t \wedge (\neg r \rightarrow \neg(q \wedge t))) \rightarrow F) \equiv && // \text{ контрапозитивна импл.} \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge ((t \wedge (q \wedge t \rightarrow r)) \rightarrow F) \equiv && // \text{ св-во на импликация} \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge (\neg(t \wedge (q \wedge t \rightarrow r)) \vee F) \equiv && // \text{ св-во на константите} \\
&\equiv ((q \wedge t \rightarrow r) \rightarrow t) \wedge \neg(t \wedge (q \wedge t \rightarrow r)) \equiv && // \text{ св-во на импликация} \\
&\equiv (\neg(q \wedge t \rightarrow r) \vee t) \wedge \neg(t \wedge (q \wedge t \rightarrow r)) \equiv && // \text{ з-н на De Morgan} \\
&\equiv (\neg(q \wedge t \rightarrow r) \vee t) \wedge (\neg t \vee \neg(q \wedge t \rightarrow r)) \equiv && // \text{ комутативност} \\
&\equiv (\neg(q \wedge t \rightarrow r) \vee t) \wedge (\neg(q \wedge t \rightarrow r) \vee \neg t) \equiv && // \text{ дистрибутивност} \\
&\equiv \neg(q \wedge t \rightarrow r) \vee (t \wedge \neg t) \equiv && // \text{ св-во на отрицанието} \\
&\equiv \neg(q \wedge t \rightarrow r) \vee F \equiv && // \text{ св-во на константите} \\
&\equiv \neg(q \wedge t \rightarrow r) \equiv && // \text{ св-во на импликация} \\
&\equiv \neg(\neg(q \wedge t) \vee r) \equiv && // \text{ з-н на De Morgan} \\
&\equiv \neg\neg(q \wedge t) \wedge \neg r \equiv && // \text{ з-н за двойното отрицание} \\
&\equiv (q \wedge t) \wedge \neg r \equiv && // \text{ асоциативност} \\
&\equiv q \wedge t \wedge \neg r
\end{aligned}$$

(6) От (3) и (5) $\Rightarrow L \equiv q \wedge t \wedge \neg r \equiv R$

$$\Rightarrow L \equiv R$$

□

Задача 3. Да се построи биекция между:

(i) $[0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и $(5, 6)$;

(ii) $4^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}}$;

(iii) $3^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

Упътване: С n^X означаваме множеството от всички (тотални) функции $f: X \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$. Тук и $2^{\mathbb{N}}$ интерпретираме по този начин, а не като степенното множество на $\mathbb{N}$.

Решение: (1) Лесно построим биекция между интервали с крайна дължина $q: (a, b) \rightarrow (c, d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d$, като приложим следните трансформации (биекции):

$$(a, b) \xrightarrow{y=x-a} (0, b-a) \xrightarrow{z=\frac{d-c}{b-a} \cdot y} (0, d-c) \xrightarrow{w=z+c} (c, d)$$

Така получаваме $q: (a, b) \rightarrow (c, d)$, $q(x) := (x-a) \cdot \frac{d-c}{b-a} + c$ - биекция.

(2) **I^{во} решение за (i):** Най-важното нещо е да построим биекция от интервала с безкрайна дължина $(0, +\infty)$ към интервал с крайна дължина (примерно $(0, 1)$), т.е. търсим биекция $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$. За това има доста опции.

I вар. Знаем, че функцията $\frac{1}{x}$, ограничена до интервала с безкрайна дължина $(1, +\infty)$, е биекция към интервала $(0, 1)$ - с крайна дължина. Ние може да експлоатираме този факт по два начина:

1 нач. $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $h(x) := \frac{1}{x+1}$ - биекция.

Просто транслираме интервала $(0, +\infty)$ до $(1, +\infty)$ с биекцията $x+1$ и после прилагаме предния факт.

2 нач. $p: (0, +\infty) \rightarrow (0, 2)$, $p(x) := \begin{cases} x & , \text{ ако } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & , \text{ ако } x > 1 \end{cases}$

Построихме тази биекция, като върху интервала $(0, 1]$ p е идентитета x - биекция. Върху другия интервал $(1, +\infty)$, използваме предния факт за $\frac{1}{x}$, но понеже образа е $(0, 1)$, който се съдържа в образа на ограничението на p до предния интервал, го транслираме с 1 нагоре до $(1, 2)$, и така образа на p става $(0, 1] \cup (1, 2) = (0, 2)$. За да няма разлики с другите варианти, дефинираме $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $h(x) := \frac{1}{2} \cdot p(x)$ - биекция.

II вар. $h: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $h(x) := \frac{2}{\pi} \cdot \arctg(x)$ - биекция.

Тук използваме познанията си по тригонометрия: $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ е нечетна нарастваща непрекъсната биекция. Така по (1) като я ограничим само до положителните реални числа, и я умножим по $\frac{2}{\pi}$, получаваме биекция от желания вид.

III вар. $p: (0, +\infty) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1)$, $p(x) := \frac{1}{1+e^{-x}}$ Тази функция от **1. задача** видяхме, че е нарастваща непрекъсната биекция, която изпраща реалната права в интервала $(0, 1)$. Като я ограничим домейна само до положителните реални числа, получаваме образ $(\frac{1}{2}, 1)$. Сега за да направим образа $(0, 1) \xrightarrow{(1)} h: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $h(x) := 2 \cdot p(x) - 1$ - биекция.

(3) От (2) и (1) $\Rightarrow g: (0, +\infty) \rightarrow (5, 6)$, $g(x) := h(x) + 5$ - биекция.

(4) Почти сме готови. Сега остава само да видим как да махнем положителните естествени числа от домейна, но да запазим образа. Затова ще се възползваме от безкрайната мощност на домейна и кодомейна. Да вземем безкрайна редица от положителни реални числа, никой член на която не е естествено число, примерно $(n + 0.5)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ (тази е удобна, защото членовете лесно се изразяват чрез положителните естествените числа). Идеята е, че трябва по някакъв начин да вкараме в редицата от образите на членовете на тази редица образите на положителните естествени числа. Това можем да го постигнем лесно като редуваме

образ на член от тази редица и образ на положително естествено число:

$$f: \begin{array}{cccccccccccccc} 1.5 & 2.5 & 3.5 & 4.5 & 5.5 & 6.5 & 7.5 & 8.5 & 9.5 & 10.5 & 11.5 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g(1) & g(1.5) & g(2) & g(2.5) & g(3) & (3.5) & g(4) & g(4.5) & g(5) & g(5.5) & g(6) & \dots \end{array}$$

Сега, само да формализиме биекцията между първата редица, и аргументите на втората. Първата редица е аритметична прогресия с първи член 1.5 и разлика 1, т.е. тя изглежда така: $(1.5 + n)_{n \in \mathbb{N}}$. Втората редица също е аритметична прогресия, но с първи член 1 и разлика 0.5, т.е. тя изглежда така: $(1 + 0.5 \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$. Вече можем да дефинираме търсената биекция f :

$$f: [0, +\infty) \setminus \mathbb{N} \rightarrow (5, 6), \quad f(x) := \begin{cases} g(1 + 0.5 \cdot n) & , \text{ ако } \exists n \in \mathbb{N}: x = 1.5 + n; \\ g(x) & , \text{ иначе.} \end{cases}$$

Тази функция по построение е биекция и сме готови.

- (5) **II-во решение за (i):** Забелязваме че можем да напишем домейна по друг начин:

$$\mathbb{D} := [0, +\infty) \setminus \mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (n, n+1)$$

- (6) По (1) дефинираме биекциите:

$$f_n: (n, n+1) \rightarrow (0, 1), \quad f_n(x) := x - n.$$

- (7) Сега идеята е да направим интервала $(0, 1)$ полузатворен отдолу. Ще взаимстваме идеята с изместването на редица от първото решение. Да вземем примерно редицата $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$. Понеже биекцията x работи почти навсякъде, освен в нулата, ще изместим образа на тази редица, така че образа на първия член да е 0, на втория да е първия и т.н.:

$$g: \begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \frac{1}{2^7} & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \frac{1}{2^1} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \dots \end{array}$$

Така можем да дефинираме биекцията:

$$g: (0, 1) \rightarrow [0, 1), \quad g(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ ако } x = \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2^{n-1}} & , \text{ ако } \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2: x = \frac{1}{2^n}; \\ x & , \text{ иначе.} \end{cases}$$

- (8) Дефинираме биекциите: $g_n: (n, n+1) \rightarrow [0, 1), \quad g_n(x) := g(f_n(x))$.
- (9) Сега имаме дефинирани биекции от отделните части на целия домейн, но проблема е, че образите им съвпадат. Затова, ще трансформираме образите им да са (полуотворените) интервали между членовете на намаляващата редица $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Така ще получим разбиване на интервала $(0, 1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$. Трансформацията на всяка функция, тъй като е между интервали с крайна дължина, правим по (1):

$$p_n: (n, n+1) \rightarrow \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right), \quad p_n(x) := \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \cdot g_n(x) + \frac{1}{n+2}.$$

(10) Сега дефинираме обединената биекция:

$$p: \mathbb{D} \rightarrow (0, 1), \quad p(x) := \begin{cases} p_n(x) & , \text{ ако } \exists n \in \mathbb{N} : n \leq x < n + 1. \end{cases}$$

(11) Последно дефинираме търсената биекция:

$$f: \mathbb{D} \rightarrow (5, 6), \quad f(x) = p(x) + 5.$$

(12) За (ii): Можем да си мислим за функциите с домейн $\mathbb{N}$ като за редици, т.е. дали ще пишем $f(n)$ или f_n е без значение. Тоест задачата се свежда до енкодиране и декодиране на редици съответно с 2 и 4 елемента.

(13) Всеки член на редица от $4^{\mathbb{N}}$ има $4 = 2^2$ стойности, тоест за всяка от тях можем да асоциираме двойка от елементи на редица от $2^{\mathbb{N}}$:

$$0 \mapsto (0, 0), \quad 1 \mapsto (0, 1), \quad 2 \mapsto (1, 0), \quad 3 \mapsto (1, 1).$$

Можем да забележим че ако долепим цифрите от двойката получаваме двоичното представяне на числото от ляво на стрелката. Можем да си дефинираме функциите за изобразяването на числото от ляво във всяка от координатите на двойката като просто ги изпишем (защото са с малък домейн), но можем да забележим, че те могат да се дефинират и така:

$$\begin{aligned} f_L: \{0, 1, 2, 3\} &\rightarrow \{0, 1\}, \quad f_L(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && // \text{ (най-голямото четно число } \leq n) / 2; \\ f_R: \{0, 1, 2, 3\} &\rightarrow \{0, 1\}, \quad f_R(n) = n - 2 \cdot f_L(n) && // \text{ остатък при деление на 2.} \end{aligned}$$

Вече можем да дефинираме търсената биекция:

$$f: 4^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}, \quad f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

където:

$$b_n := \begin{cases} f_L(a_k) & , \text{ ако } \exists k \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot k; \\ f_R(a_k) & , \text{ ако } \exists k \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot k + 1. \end{cases}$$

(14) **I^{во} решение за (iii):** Можем да се опитаме да постъпим както за (ii), но проблема е, че няма да е толкова симетрично. Всеки член на редица от $3^{\mathbb{N}}$ има 3 възможни стойности, което не е точна степен на двойката. Въпреки това, можем да простои биекцията. Идеята е, че в зависимост от стойността на члена на редица от $3^{\mathbb{N}}$, ще го заместим с неконстантен брой членове на редица от $2^{\mathbb{N}}$. Едно примерно асоцииране е:

$$0 \mapsto (0,), \quad 1 \mapsto (1, 0), \quad 2 \mapsto (1, 1),$$

Това кодиране е биективно, понеже късите редици, с които замества всяка стойност на член на редица от $3^{\mathbb{N}}$, имат свойството, че никоя не е представка на някоя друга. Затова можем еднозначно да съпоставим редица от $3^{\mathbb{N}}$ с редица от $2^{\mathbb{N}}$, и обратно.

Интересно: Това се нарича кодиране на Хъфман и се използва при компресиране на данни за по-бързия им транспорт.

- (15) **II-во решение за (iii):** Има еднозначно съответствие на елементите на $2^{\mathbb{N}}$ и елементите на степенното множество на $\mathbb{N}$ (оттам е дошла и нотацията за степенното множество, с която сме се запознали на лекции). Освен това, на лекции сме показали, че то е неизброимо. Досега не сме се запознавали с много различни по мощност неизброими множества, т.е. най-вероятно има биекция от $2^{\mathbb{N}}/3^{\mathbb{N}}$ към някое от познатите ни неизброими множества.
- (16) Можем да си мислим за членовете на редиците от $p^{\mathbb{N}}$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) като цифри в p -ична бройна система. Така можем да асоциираме редиците с редицата от цифри след десетичната запетая в p -ичния запис на числата от $(0, 1]$. Обаче има един проблем: както си спомняме от ДИС1 при построението на реалните числа, тази асоциация, която описахме, има един проблем - редиците, които завършват на безкрайна редица от $(p - 1)$ -ци (в ДИС това бяха 9-ките в 10-ична бройна система) се асоциират с числа с краен p -ичен запис (и след това безкрайна редица нули), за които има други редици, с които се асоциират. За да се справим с този проблем, ще отделим всички такива редици, които завършват на безкрайна редица от $(p - 1)$ -ци. Преди безкрайната редица от 9-тки има крайна редица от p -ични цифри, като последната е $\neq p - 1$. Тоест можем да ги асоциираме тези редици с (безкрайно) подмножество на множеството на всички крайни редици от p -ични цифри, което пък е изброимо. Да кръстим това безкрайно изброимо подмножество $\mathbb{D} \subset \{0, 1, \dots, p - 1\}^*$.
- (17) Нека $S := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и $T: S \rightarrow \mathbb{D}$ е редицата (функцията/биекцията) от всички крайни редици с p -ични цифри, за които последната цифра не е $p - 1$, подредени лексикографски. $S(1) = \epsilon$ е празната редица, $S(2) = 0$, и т.н.
- (18) Дефинираме биекцията:
- $$f_p: p^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1) \cup S,$$
- $$f_p((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \begin{cases} T^{-1}(a_0 a_1 \dots a_n) \in S & , \text{ ако } \exists n \in \mathbb{N} \cup \{-1\} : \forall m \in \mathbb{N}, m > n: a_m = p - 1; \\ 0.\overline{a_0 a_1 \dots}_{(p)} \in [0, 1) & , \text{ иначе.} \end{cases}$$
- Ако в първия случай $n = -1$, то $a_0 \dots a_n = \epsilon$.
- (19) Търсената биекция тогава е $f: 3^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := f_2^{-1} \circ f_3(x)$.
- (20) Тази идея може да се използва и за (ii): $f: 4^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$, $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) := f_2^{-1} \circ f_4(x)$. □

Задача 4. Постройте биекция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, изпълняваща (едновременно) следните две свойства:

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}: \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : f^m(n) = n$;
- (ii) $\neg \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \forall n \in \mathbb{N}: f^m(n) = n$.

Решение: (0) **Идея:** разбиваме естествените числа на множества с различни крайни мощности и f ограничена върху всяко множество в разбиването е пермутация - прост цикъл.

- (1) Примерно, да вземем редицата $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. За всяко $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$. $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $h(n) = 2n + 1$ е инекция, тоест разбиването:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{k \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq k < (n+1)^2\}$$

върши работа.

- (2) Дефинираме $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ така:

$$f(k) := \begin{cases} k+1 & , \text{ ако } \exists n \in \mathbb{N}: (n^2 \leq k < (n+1)^2 - 1) \\ n^2 & , \text{ ако } \exists n \in \mathbb{N}: k = (n+1)^2 - 1 \end{cases}$$

- (3) Лесно се забелязва, че f е биекция, понеже като ограничим f до $\{k \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq k < (n+1)^2\}$ за някое $n \in \mathbb{N}$, f действа по следния начин:

$$n^2 \mapsto n^2 + 1 \mapsto n^2 + 2 \mapsto \dots \mapsto (n+1)^2 - 2 \mapsto (n+1)^2 - 1 \mapsto n^2$$

Така $f|_{\{k \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq k < (n+1)^2\}}$ е биекция (пермутация) с образ именно домейна си, а оттам, f също е биекция (понеже домейните/образите на ограниченията образуват разбиване на $\mathbb{N}$).

- (4) Сега да проверим, че f има желаните свойства. Ако $k \in \{t \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq t < (n+1)^2\}$ за някое $n \in \mathbb{N}$, то от (3) $\Rightarrow \{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid f^m(k) = k\} = (2n+1) \cdot (\mathbb{N} \setminus \{0\}) = \{(2n+1) \cdot k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ (т.е. всички положителни цели числа, кратни на $2n+1$), в частност това множество не е празно и оттам първото свойство е изпълнено.

От друга страна, тъй като няма положително естествено число, кратно на всички нечетни числа (т.е. от вида $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$), следва директно че и второто условие е изпълнено.

□

Задача 5. (Бонус) Докажете чрез индукция, че:

$$6 \mid \left\lfloor \left(\frac{13 + \sqrt{145}}{2} \right)^n \right\rfloor, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Решение: (0) Лесно се проверява, че ако вземем директно твърдението и се опитаме да го докажем чрез индукция (силна или слаба) ще стигнем до задънена улица. Затова трябва да засилим условието по някакъв начин.

Ние знаем, че числото $\frac{13+\sqrt{145}}{2}$, и неговото “рационално спрегнато” $\frac{13-\sqrt{145}}{2}$, работят много добре заедно (пр. при рационализиране на знаменателя на дроб). Затова да се опитаме да ги комбинираме по някакъв начин.

- (1) Нека дефинираме $a := \frac{13+\sqrt{145}}{2}$, $b := \frac{13-\sqrt{145}}{2}$, и:

$$f: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) := a^n + b^n$$

(2) **Твърдение:** $f(n) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Доказателство:

(Силна) индукция: $f(n) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Базови случаи:

$$\boxed{n=1} : f(1) = a^1 + b^1 = \left(\frac{13+\sqrt{145}}{2}\right) + \left(\frac{13-\sqrt{145}}{2}\right) = 13 \stackrel{?}{\in} \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \boxed{n=2} : f(2) &= a^2 + b^2 = \\ &= \left(\frac{13+\sqrt{145}}{2}\right)^2 + \left(\frac{13-\sqrt{145}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{169 + 26\sqrt{145} + 145}{4} + \frac{169 - 26\sqrt{145} + 145}{4} = \\ &= \frac{169 + 145}{2} = \frac{314}{2} = 157 \stackrel{?}{\in} \mathbb{N} \quad \checkmark \end{aligned}$$

И.Х.: Да допуснем, че твърдението е вярно за всяко $k < n$, за някое $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

$$\Rightarrow f(n-2), f(n-1) \in \mathbb{N}$$

И.С.: Да проверим дали $f(n) \stackrel{?}{\in} \mathbb{N}$.

Заради приликата на $f(n)$ и $f(n-1)$ нека разгледаме:

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot f(n-1) &= (a+b) \cdot (a^{n-1} + b^{n-1}) = \\ &= a^n + a \cdot b^{n-1} + b \cdot a^{n-1} + b^n = a^n + b^n + a \cdot b^{n-1} + b \cdot a^{n-1} = \\ &= f(n) + a \cdot b \cdot (a^{n-2} + b^{n-2}) = f(n) + a \cdot b \cdot f(n-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(n) &= (a+b) \cdot f(n-1) - a \cdot b \cdot f(n-2) = \\ &= f(1) \cdot f(n-1) - \left(\frac{13+\sqrt{145}}{2}\right) \cdot \left(\frac{13-\sqrt{145}}{2}\right) \cdot f(n-2) = \\ &= 13 \cdot f(n-1) - \left(\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{145}}{2}\right)^2\right) \cdot f(n-2) = \\ &= 13 \cdot f(n-1) - \frac{169-145}{4} \cdot f(n-2) = 13 \cdot f(n-1) - 6 \cdot f(n-2) \stackrel{?}{\in} \mathbb{N} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\text{и.х.} \\ \in \mathbb{N}}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\text{и.х.} \\ \in \mathbb{N}}}$

$\Rightarrow$ Твърдението е вярно за всяко $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и е доказано по метода на силната математическа индукция.

Освен това, изведохме една много полезна връзка:

$$f(n) = 13 \cdot f(n-1) - 6 \cdot f(n-2), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

(3) $b \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : b^n \in (0, 1) \\ &\Rightarrow a^n = f(n) - b^n \in (f(n) - 1, f(n)) \\ &\Rightarrow \lfloor a^n \rfloor = \left\lfloor \left(\frac{13+\sqrt{145}}{2}\right)^n \right\rfloor = f(n) - 1 \end{aligned}$$

(4) **Твърдение:** $f(n) \equiv 1 \pmod{6}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Доказателство:

(Слаба) индукция: $f(n) \equiv 1 \pmod{6}, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Базови случаи:

$$\boxed{n=1} : f(1) \equiv 13 \stackrel{?}{\equiv} 1 \pmod{6} \checkmark$$

$$\boxed{n=2} : f(2) \equiv 157 \stackrel{?}{\equiv} 1 \pmod{6} \checkmark$$

И.Х.: Да допуснем, че твърдението е вярно за някое $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

$$\Rightarrow f(n) \equiv 1 \pmod{6} \in \mathbb{N}$$

И.С.: Да проверим дали $f(n+1) \stackrel{?}{\equiv} 1 \pmod{6}$.

$$f(n+1) \stackrel{((2))}{\equiv} 13.f(n) - 6.f(n-1) \stackrel{\text{И.Х.}}{\equiv} 13.1 - 6.1 \equiv 7 \stackrel{?}{\equiv} 1 \pmod{6} \checkmark$$

$\Rightarrow$ Твърдението е вярно за всяко $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ и е доказано по метода на слабата математическа индукция.

$$(5) \left\lfloor \left(\frac{13+\sqrt{145}}{2} \right)^n \right\rfloor = f(n) - 1 \equiv 0 \pmod{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

□