

Име:	ФН:	Група:
------	-----	--------

Първо малко контролно по ДС на спец. Информатика
30.03.2025 г.

Задача 1 (25 т.). Докажете равенството за $n \in \mathbb{N}$, като използвате индукция:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

Задача 2. Разглеждаме релацията $\prec_k \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ такава, че $a \prec_k b$, ако $S_k(a) > S_k(b)$, като тук $S_k(n)$ означаваме сумата от цифрите на n (в бройна система с основа k).

- а) (10 т.) да се докаже $\prec_{10}$ е релация на строга частична наредба;
- б) (5 т.) намерете всички максимални елементи на $\prec_{10}$;
- в) (5 т.) дайте пример за безкрайна антиверига[†] за релацията $\prec_{10}$;
- г) (5 т.) докажете или опровергайте, че $a \prec_{10} b \Leftrightarrow a \prec_k b$, където $k \in \mathbb{N}^+$;
- д) (бонус 15 т.) да се докаже, че съществува изоморфизъм $(\mathbb{N}^+, \prec_{10}) \cong (\mathbb{N}^+, \prec_k)$, тоест съществува биективна функция $f : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$, за която $a \prec_{10} b \Leftrightarrow f(a) \prec_k f(b)$;

[†] антиверига ще наричаме подмножество на $\mathbb{N}^+$, на което никои два елемента не са сравними по отношение на релацията.

Задача 3 (25 т.). Нека $h : A \rightarrow A$ е функцията. Да се докаже, че следните условия са еквивалентни:

- $(\forall f, g : A \rightarrow A)(f \circ h = g \circ h \rightarrow f = g)$;
- h е сюрективна;

Задача 4 (25 т.). Разглеждаме множество $\mathcal{U} = \{1, 2, \dots, 12\}$. Конструирайте множество P с $|P| = 10$, състоящо се от разбивания на $\mathcal{U}$, за което едновременно са в сила следните:

- $\forall p_1, p_2 \in P : p_1 \cap p_2 \neq \emptyset$;
- всяко разбиване $p \in P$ съдържа поне едно двуелементно множество;
- общият брой елементи в разбиванията $(\sum_{i=1}^{10} |p_i|)$ е минимален;

Докажете прецизно, че така построеното от Вас множество удовлетворява и трите.

Времето за работа е 90 минути. Успех! :)