Зад. 1 Нека p, q и r са съждения. Докажете с еквивалентни преобразувания, че

$$(p \wedge q \to r) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \equiv p \vee q \to r$$

Решение:

$(p \wedge q \to r) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \equiv$ // св-во на импликацията
$(\neg(p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv$ // з-н на De Morgan
$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv$ // дистр. на конюнкцията спрямо дизюнкцията

$(\neg p \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r \wedge r) \vee$
$(\neg q \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge r \wedge r) \vee$
$(r \wedge \neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg p \wedge r) \vee (r \wedge r \wedge \neg q) \vee (r \wedge r \wedge r) \equiv$ // идемпот. и комут. на конюнкцията

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee$
$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee r \equiv$ // идемпотентност на дизюнкцията

$(\neg p \wedge \neg q) \vee ((\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge r) \vee r) \equiv$ // закон за поглъщането
$(\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv$ // закон на De Morgan
$\neg(p \vee q) \vee r \equiv$ // свойство на импликацията
$p \vee q \to r$

Зад. 2 Нека са дадени n прави в равнината, които са две по две различни и нито две от които не са успоредни. Професор Дълбоков твърди, че, както и да са разположени тези прави в равнината, съществува единствена точка, която е обща за всички тях. Професорът предлага следното доказателство по индукция по n на това твърдение.

- Базата е $n = 2$. Наистина, ако две прави са различни и не са успоредни, те имат обща точка и тя е само една. Базата е истина.

- Индуктивното предположение е, че за $n = k$ твърдението е истина. С други думи, за всеки k прави, които са две по две различни и всеки две от които не са успоредни, е вярно, че съществува единствена точка, която е обща за всички.

- В индуктивната стъпка разглеждаме $k + 1$ прави $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$, които са две по две различни и всеки две от които не са успоредни.

  Да разгледаме само правите $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$. Те са k на брой, две по две различни и всеки две от тях не са успоредни. Съгласно индуктивното предположение, съществува единствена точка X, която е обща за тях.

  Да разгледаме само правите $\ell_2, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$. Те са k на брой, две по две различни и всеки две от тях не са успоредни. Съгласно индуктивното предположение, съществува единствена точка Y, която е обща за тях.

  Забелязваме, че X е обща точка за ℓ_2 и ℓ_k, но също така и Y е обща точка за ℓ_2 и ℓ_k. Но тогава $X = Y$, понеже ℓ_2 и ℓ_k не могат да имат повече от една обща точка, тъй като са различни прави.

  Щом $X = Y$, заключаваме, че правите $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k, \ell_{k+1}$, имат обща точка, която е единствена. С което доказателството приключва.

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Доказателството е невалидно. В индуктивната стъпка се разглеждат правите ℓ_1, ℓ_2, ℓ_k и ℓ_{k+1} като две по две различни прави. Следователно, $k + 1$ е поне 4, откъдето k е поне 3. Но базата на доказателството е за 2 прави, а не за 3 прави.

И така, това "доказателство" не доказва твърдението за $n = 3$. Ако за краткост наречем предиката $P(n)$, липсва импликацията

$$P(2) \to P(3)$$

Щом тя липсва, не е доказано, че

$$P(2) \wedge (\forall n \geq 2 : P(n) \to P(n+1))$$

и нямаме право да твърдим $\forall n \geq 2 : P(n)$.

Зад. 3 В тази задача се иска да докажете две тъждества, съдържащи биномни коефициенти. Използвайте какъвто метод за доказателство Ви е най-удобен.

Нека $r \in \mathbb{N}$ и $\ell \in \mathbb{N}^+$. Докажете, че

$$\binom{r}{\ell} = \frac{r}{\ell}\binom{r-1}{\ell-1} \tag{1}$$

Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = 1$$

Решение: Да докажем първото тъждество. По дефиниция,

$$\binom{r}{\ell} = \frac{r(r-1)\cdots(r-\ell+1)}{\ell!}$$

Но щом ℓ е положително, в сила е

$$\frac{r(r-1)\cdots(r-\ell+1)}{\ell!} = \frac{r(r-1)\cdots(r-\ell+1)}{\ell(\ell-1)!} = \frac{r}{\ell}\cdot\frac{(r-1)\cdots(r-\ell+1)}{(\ell-1)!} = \frac{r}{\ell}\binom{r-1}{\ell-1}$$

Което и трябваше да докажем.

Да докажем второто тъждество. Започваме с лявата страна:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} k\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&\sum_{k=0}^{n} (k+1-1)\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}
\end{aligned} \tag{2}$$

- Първо разглеждаме $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = && // \text{ ползваме (1) с } r = n+1 \text{ и } \ell = k+1 \\
&\sum_{k=0}^{n} (k+1)\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&\sum_{k=0}^{n} (n+1)\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = && // \; n+1 \text{ не зависи от } k \\
&(n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&(n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}\frac{1}{n} = && // \; \frac{1}{n} \text{ не зависи от } k \\
&\frac{n+1}{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}1^{n-k} = && // \text{ съгласно теоремата на Newton} \\
&\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}
\end{aligned} \tag{3}$$

- Сега разглеждаме $-\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}$:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{0\le k\le n}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&-\sum_{1\le k+1\le n+1}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1} = \\
&-\left(\sum_{1\le k+1\le n+1}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right) - 1 + 1 = \\
&-\left(\sum_{1\le k+1\le n+1}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right) - \binom{n+1}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^{0} + 1 = \\
&-\left(\sum_{0\le k+1\le n+1}\binom{n+1}{k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\right) + 1 = \\
&-\left(\sum_{0\le k\le n+1}\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^{k} 1^{n-k}\right) + 1 = \qquad \text{// съгласно теоремата на Newton} \\
&-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} + 1
\end{aligned} \tag{4}$$

Заместваме с (3) и (4) в (2):

$$\begin{aligned}
&\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} + 1 = \\
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + 1 = \\
&\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n}\right)}_{0} + 1 = 0 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Което и трябваше да докажем.

Зад. 4 Нека $\mathbb{X}$ е следното множество

$$\mathbb{X} = \{S \subset \mathbb{N} \mid S \text{ е крайно}\}$$

Докажете, че $\mathbb{X}$ е изброимо.

Решение: Иска се да се докаже, че множеството от крайните подмножества на естествените числа е изброимо. Очевидно то е безкрайно, така че ще докажем, че е изброимо безкрайно.

Разглеждаме характеристичните редици, съответни на елементите на $\mathbb{X}$. Както знаем от лекции, тези редици са безкрайни, но всяка от тях, с изключение на редицата $(0, 0, \ldots)$, която съответства на празното множество, е от вида

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, 1, 0, 0, \ldots$$

където $k \in \mathbb{N}$ и $a_i \in \{0, 1\}$ за $1 \leq i \leq k$. На прост български, всяка от тези редици без нулевата има една най-дясна единица, намираща се на някаква позиция $k + 1$, и оттам насетне съдържа само нули.

Тогава на всяка редица α без нулевата съответства, и то биективно, естественото число, което се записва в двоична позиционна бройна система със стринга

$$1, a_k, \ldots, a_2, a_1$$

Това число има стойност $2^{k+1} + 2^{a_k} + \cdots + 2^{a_2} + 2^{a_1}$. Да го наречем "*числото, съответно на* α".

И виждаме следната биекция $f : \mathbb{X} \to \mathbb{N}$:

- $f(\varnothing) = 0$,
- за всяко непразно $S \in \mathbb{X}$, $f(S)$ е числото, което е съответно на α, където α е характеристичната редица, съответна на S.

Зад. 5 Дадени са цели числа a_1, a_2, ..., a_n, които не са непременно две по две различни. Докажете, че съществуват цели числа i и j, такива че $0 \le i < j \le n$ и сумата

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$$

е кратна на n.

Решение: Нека $S_i = \sum_{i=1}^{k} a_k$, за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека r_k е остатъкът при делението на S_k на n, за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно $r_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ако съществува $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, такова r_k е нула, то $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ се дели на n, така че съществуват i и j, такива че $0 \le i < j \le n$ и сумата $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ е кратна на n, а именно $i = 0$ и $j = k$.

Да допуснем, че $r_k \neq 0$ за $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогава имаме n на брой остатъка, всеки от които е от множеството $\{1, 2, \ldots n-1\}$, което има мощност $n-1$. Съгласно принципа на Дирихле, съществуват поне два остатъка r_{k_1} и r_{k_2}, такива че $k_1 \neq k_2$ и $r_{k_1} = r_{k_2}$. БОО, нека $k_1 < k_2$. Тогава сумите $S_{k_1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}$ и $S_{k_2} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_2}$ имат един и същи остатък при деление на n. Тогава разликата $S_{k_2} - S_{k_1}$ има остатък нула при деление на n. Очевидно

$$S_{k_2} - S_{k_1} = a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}$$

Тогава съществуват i и j, такива че $0 \le i < j \le n$ и сумата $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ е кратна на n, а именно $i = k_1$ и $j = k_2$.

Зад. 6 По колко начина можем да раздадем 20 различни подаръци на 3 деца, така че всяко дете да получи поне два подаръка?

Решение: За $i = 1, 2, 3$, нека A_i са раздаванията, в които дете i получава не получава поне два подаръка, тоест, получава най-много един подарък; в някакъв смисъл, дете i е "нарушител". Търсим $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$. Ще намерим тази мощност на множество чрез принципа на включването и изключването:

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Очевидно $|A_1| = |A_2| = |A_3|$ и $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3|$. Освен това $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, понеже не може всички деца да са нарушители – ако всички деца са нарушители, раздадени са най-много 3 подаръка, а подаръците са общо 20. Тогава

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - 3|A_1| + 3|A_1 \cap A_2| \tag{5}$$

Универсумът U е множеството от раздаванията на подаръците без ограничения. Това са функциите от множеството на подаръците в множеството от децата. Броят на функциите е 3^{20}, така че $|U| = 3^{20}$.

$|A_1| = 2^{20} + 20 \cdot 2^{19}$, понеже

- има 2^{20} раздавания, в които дете 1 не получава нищо – това е броят на функциите от 20 елементен домейн и 2 елементен кодомейн;
- има $20 \cdot 2^{19}$ раздавания, в които дете едно получава точно един подарък – има 20 избора за този подарък и за всеки от тях, броят на раздаванията на останалите 19 подаръка на останалите 2 деца е 2^{19}.

Да намерим $|A_1 \cap A_2|$. Деца 1 и 2 са нарушители.

- Може дете 1 и дете 2 да не получат нищо. Тогава дете 3 получава всички подаръци и има точно 1 начин да стане това.
- Може дете 1 да не получи нищо, а дете 2 да получи точно един подарък. Има точно 20 начина да стане това.
- Може дете 2 да не получи нищо, а дете 1 да получи точно един подарък. Има точно 20 начина да стане това.
- Може дете 1 да получи точно един подарък и дете 2 да получи точно един подарък. Има $20 \cdot 19$ начина да стане това.

И така, $|A_1 \cap A_2| = 1 + 20 + 20 + 20 \cdot 19$.

Отговорът е

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 3^{20} - 3(2^{20} + 20 \cdot 2^{19}) + 3(1 + 20 + 20 + 20 \cdot 19)$$

Численият отговор, който не се иска, е 3 452 182 656.