

Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите (СУ, ФМИ, летен семестър на 2024 / 2025 уч. г.)

Задача 1. Да се докаже, че $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(n) < p(2n)$ за всяко естествено число n , където $p(n)$ е броят на целочислените разбивания на n .

Задача 2. Имаме два еднакви квадратни листа, всеки с лице n квадратни сантиметра. Всеки лист е разделен на n многоъгълника, всеки с лице 1 кв. см, като двете разделяния могат да са различни. Налагаме листовете един върху друг така, че да съвпадат. Докажете, че можем да забием n кабарчета така, че всички многоъгълници да бъдат прободени.

Задача 3. Да се докаже, че броят на разбиванията на числото 2020 на десет събираеми е равен на броя на разбиванията на числото 2065 на десет събираеми, две по две различни.

Задача 4.

Правоъгълник с водоравни и отвесни страни е разделен на $m \times n$ клетки с общо $(m+1)(n+1)$ върха. Нека $f(m; n)$ е броят на всички пътища от горния ляв до долния десен ъгъл, образувани от страните на клетките без повтаряне на върхове. Докажете, че $f(m; n) \leq 2^{mn}$.

Задача 5. Всеки изпъкнал n -ъгълник може да се раздели на триъгълници чрез $n - 3$ непресичащи се диагонала. По колко начина е възможно това? Върховете на n -ъгълника са различни, например номерирани са от 1 до n .

Задача 6. Целите числа от 1 до n вкл. (в този ред) са написани в кръг. Разбиваме числата на групи и свързваме две по две числата от всяка група. Разбиването се нарича непресичащо се, ако не се пресичат никои две хорди от различни групи. Намерете броя на непресичащите се разбивания.

Задача 7.

Нека n е цяло положително число. Със знака S_n означаваме множеството от точки $(x; y)$ с целочислени координати, такива че

$$|2x| + |2y + 1| < 2n.$$

Път наричаме редица от различни точки в S_n , за която поредните точки са на разстояние 1 една от друга. Докажете, че множеството S_n не може да се разбие на по-малко от n пътя.

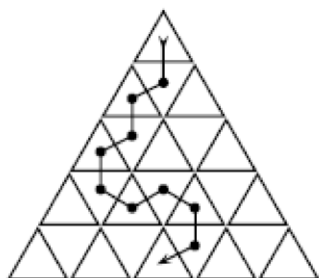
Задача 8.

Дадено е естествено число r и правоъгълник $ABCD$, $|AB| = 20$, $|BC| = 12$. Правоъгълникът е разделен на 20×12 единични квадратчета. Разрешен е ход от едно квадратче в друго само ако разстоянието между центровете им е равно на \sqrt{r} . Търсим редица от ходове, водещи от квадратчето на връх A до квадратчето на връх B .

- а) Докажете, че няма такава редица от ходове, ако r се дели на 2 или на 3.
- б) Докажете, че има такава редица от ходове при $r = 73$.
- в) Има ли редица от ходове при $r = 97$?

Задача 9.

Равностранен триъгълник с дължина на страната n е разделен на единични триъгълници, както е показано на чертежа. Нека $f(n)$ е броят на пътищата от най-горния триъгълник до средния триъгълник на най-долния ред, такива че всеки два съседни триъгълника в пътя споделят обща страна и пътят никога не се движи от по-долен към по-горен ред. Триъгълник може да бъде посетен най-много веднъж. Примерен път е показан за $n = 5$. Пресметнете $f(2005)$.



Задача 10. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=m}^{n-r} \binom{k}{m} \binom{n-k}{r} = \binom{n+1}{m+r+1}.$$

Задача 11. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^3 = \sum_{r=\lceil n/2 \rceil}^n \binom{n}{r}^2 \binom{2r}{n}.$$

Задача 12. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n} \cdot 2^{n-k} = 4^n.$$

Задача 13. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-1)^{n-k-1} = n^{n-1}.$$

Задача 14. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

където F означава число на Фибоначи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Задача 15. Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n},$$

където F означава число на Фибоначи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Задача 16. За кои n биномните коефициенти $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n}$ се редуват: нечетен, четен, нечетен, четен, \dots , нечетен?

Задача 17. Да се намери остатъкът, който биномният коефициент $\binom{2^{n+1}}{2^n}$ дава при деление на 4. (Числото n е цяло неотрицателно.)

Задача 18. По колко начина можем да оцветим стените на куб с k цвята (всяка стена в един цвят), ако смятаме за неразличими онези оцветявания, които се получават едно от друго чрез въртене на куба (като твърдо тяло)?

Задача 19. Намерете експоненциалната пораждаща функция $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n$ на редицата $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ от задача 9.

Задача 20. Робот тръгва от долния ляв ъгъл на триъгълна таблица с n реда и n стълба. На всяка стъпка се придвижва с една клетка надясно или нагоре. Движението престава, щом роботът стигне до диагонала (в сиво). Колко са възможните пътища? Отговорът да бъде функция на n в затворена форма.

