Примерни решения на задачите от изпита по ДС, КН, поток II, 10.02.2014 г.
първа и втора част

1 Първа Част

5 т. **Зад. 1** Докажете, че сечението на множества е дистрибутивно спрямо обединението на множества. Използвайте табличния метод.

Решение: Иска се да се докаже, че за произволни множества A, B и C е в сила $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

От това, че петата и осмата колона са равни следва, че $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

Зад. 2 Нека $A = \{a, b\}$. Нека $X = \{z \,|\, z$ е частична функция с домейн A и кодомейн $A\}$.

3 т. **а)** Напишете X в явен вид. Можете да използвате каквато искате нотация, стига тя да е абсолютно ясна и недвусмислена. Дайте имена на елементите на X.

3 т. **б)** Нека $R \subseteq X \times X$ се дефинира така:

$$\forall (p, q) \in X \times X \left((p, q) \in R \leftrightarrow \forall u \in A \, \forall v \in A \, (p(u) = v \to q(u) = v) \right)$$

Докажете, че R е релация на частична наредба.

3 т. **в)** Нарисувайте диаграмата на Хасе на R, използвайки имената, които дадохте в **а)**.

Решение: Първо да видим колко са въпросните частични функции – не е задължително, но помага да знаем колко обекта трябва да построим. От основните принципи на комбинаториката лесно следва, че броят на частичните функции от краен домейн с мощност n в краен кодомейн с мощност n е $(n+1)^n$. За да съобразим защо е така, достатъчно е да съобразим, че

- броят на тоталните функции от краен домейн с мощност p в краен кодомейн с мощност q е q^p, и
- съществува биекция между множеството от тоталните функции от краен домейн с мощност p в краен кодомейн с мощност $q+1$, от една страна, и множеството от частичните функции от краен домейн с мощност p в краен кодомейн с мощност q, от друга страна.

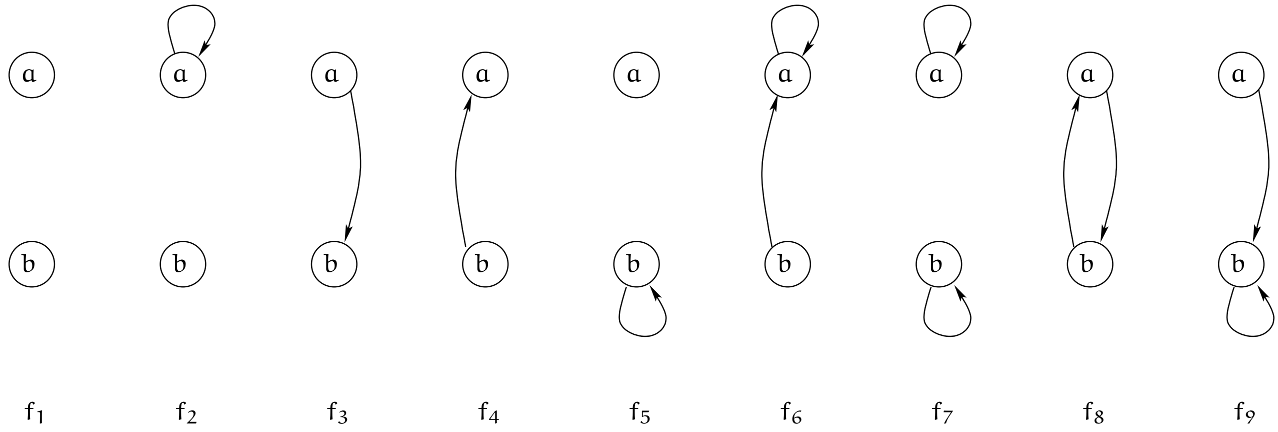
Следователно, в нашия случай частичните функции са $(2+1)^2 = 9$ на брой. А именно,

$f_1 = \emptyset$ $\quad f_2 = \{(a, a)\}$ $\quad f_3 = \{(a, b)\}$ $\quad f_4 = \{(b, a)\}$ $\quad f_5 = \{(b, b)\}$

$f_6 = \{(a, a), (b, a)\}$ $\quad f_7 = \{(a, a), (b, b)\}$ $\quad f_8 = \{(a, b), (b, a)\}$ $\quad f_9 = \{(a, b), (b, b)\}$

Това е най-формалното описание на деветте частични функции – всяка от тях, съгласно дефиницията, е множество от наредени двойки. Функциите $f_6, \ldots, f_9$ са тоталните функции.

Има и по-прости и нагледни описания. Тъй като домейнът съвпада с кодомейна, можем да мислим за тези частични функции като за релации и да нарисуваме диаграмите им (ориентирани графи с възможни примки):



Ще покажем, че релацията R е рефлексивна. Действително, за всяка f_i, $1 \leq i \leq 9$ е вярно, че $f_i \, R \, f_i$, защото $\forall u, v \in A$ тривиално имаме $f_i(u) = v \to f_i(u) = v$.

Ще покажем, че релацията R е транзитивна, тоест, че за всеки f_i, f_j, f_k, $1 \leq i, j, k \leq 9$ е вярно, че $f_i \, R \, f_j \wedge f_j \, R \, f_k \to f_i \, R \, f_k$. Да разгледаме произволни три, не непременно различни, $f, g, h \in \{f_1, \dots, f_9\}$. Нека е вярно, че

$$\forall u, v \in A : f(u) = v \to g(u) = v \tag{1}$$
$$\forall u, v \in A : g(u) = v \to h(u) = v \tag{2}$$

Искаме да покажем, че $f(u) = v \to h(u) = v$ *за произволни* $u, v \in A$. Да разгледаме произволни $x, y \in A$. Да допуснем, че $f(x) = y$. Тогава съгласно (1) и (2) следва, че $h(x) = u$. Сега да допуснем, че $f(x) \neq y$, тоест или $f(x)$ е дефинирана и не е y, или $f(x)$ изобщо не е дефинирана. Но щом $f(x) = y$ е **лъжа**, то импликацията

$$f(x) = y \to h(x) = y$$

е **истина**, тъй като лъжата влече логически всяко съждение.

Ще покажем, че релацията R е антисиметрична. Нека за произволни две частични функции f и g е вярно, че

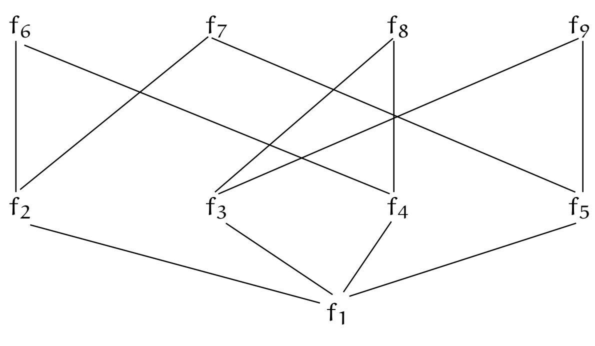
$$\forall u, v \in A : f(u) = v \to g(u) = v$$
$$\forall u, v \in A : g(u) = v \to f(u) = v$$

Но това е същото като

$$\forall u, v \in A : f(u) = v \leftrightarrow g(u) = v$$

Следователно, функциите съвпадат, тоест $f = g$.

Доказахме, че R е релация на частична наредба. Диаграмата на Хасе изглежда така:



$\square$

Зад. 3 Нека $A = \{1, 2, 3, 4\}$, а B е някакво крайно непразно n-елементно множество.

2 т. **а)** Колко са разбиванията на A на точно две (непразни) подмножества? Напишете тези разбивания в явен вид.

3 т. **б)** Колко са разбиванията на B на точно две (непразни) подмножества? Аргументирайте отговора си.

4 т. **в)** Ако $f(n,k)$ е броят на разбиванията на B на точно k непразни подмножества, където $1 < k \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения, че $f(n,k) = k \cdot f(n-1,k) + f(n-1,k-1)$.

Решение: Разбиванията на A на две непразни множества са:

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{\{1\},\{2,3,4\}\} & S_2 = \{\{2\},\{1,3,4\}\} & S_3 = \{\{3\},\{1,2,4\}\} & S_4 = \{\{4\},\{1,2,3\}\} \\ S_5 = \{\{1,2\},\{3,4\}\} & S_6 = \{\{1,3\},\{2,4\}\} & S_7 = \{\{1,4\},\{2,3\}\} & \end{array}$$

Разбиванията на B на две непразни множества са $\frac{1}{2}(2^n - 2)$ на брой, тоест $2^{n-1} - 1$. Да видим защо. Нека C е множеството $2^B \setminus (\emptyset \cup B)$. Очевидно $|C| = 2^n - 2$. C се разбива на (множество от) ненаредени двойки, а именно $\{X, C \setminus X\}$ върху всички $X \in C$, и съществува биекция между множеството от тези двойки и въпросните разбивания. Двойките са на брой $\frac{1}{2}|C|$, с други думи $2^{n-1} - 1$.

Нека C е множеството от разбиванията на B на точно k непразни подмножества, където $k > 1$. Да фиксираме произволен $a \in B$. Всеки елемент от C (тоест, за всяко разбиване на B) съдържа a, щом говорим за разбиване. Има две взаимно изключващи се възможности: a е в поднмножество само по себе си, или a е заедно с поне един друг елемент. Тоест, C се разбива на две подмножества: тези разбивания, които съдържат елемент $\{a\}$, и тези разбивания, които не съдържат $\{a\}$. Разбиванията, съдържащи $\{a\}$, са $f(n-1,k-1)$ на брой, защото останалите $n-1$ елемента биват разбивани на $k-1$ подмножества, а тези, които не съдържат $\{a\}$ са $k \cdot f(n-1,k)$ съгласно следните съображения: ако махнем a, пак остават k непразни подмножества, но сега те са разбивания на $n-1$ елемента, и елементът a може да бъде сложен в кое да е от тях. По принципа на разбиването, $|C| = k \cdot f(n-1,k) + f(n-1,k-1)$. □

5 т. **Зад. 4** Нека рекурентното отношение $T(n)$ върху естествените числа е дефинирано така:

$$T(0) = 0$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + n \cdot 2^{n-1}$$

Намерете общото решение на $T(n)$.

Решение: Даденото отношение (без началното условие) е еквивалентно на

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + \frac{n}{2} \cdot 2^n$$

То не е хомогенно. Хомогенната част е $T(n) = 2 \cdot T(n-1)$. Характеристичното уравнение е

$$x - 2 = 0$$

с мултимножество от корени $\{2\}_M$. Нехомогенната част е $\frac{n}{2} \cdot 2^n$. Константата на n-та степен е 2, а полиномът, с който е умножена, е от първа степен. От нехомогенната част "идва" корен 2 с кратност $1 + 1 = 2$. С други думи, мултимножеството, идващо от нехомогенната част, е $\{2, 2\}_M$. Обединението на двете мултимножества е $\{2, 2, 2\}_M$. Тогава общото решение е

$$T(n) = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n$$

Това е достатъчно за пълен брой точки. За Ваше сведение, точното решение е $T(n) = \frac{1}{4}\left(n(n+1)2^n\right)$.

Зад. 5, БОНУС Нека $P(x,y)$ е произволен двуместен предикат върху произволни крайни непразни домейни. Кое от следните твърдения е вярно и кое, не? Аргументирайте отговорите си.

2 т. **а)** $\forall x \exists y (P(x,y)) \rightarrow \exists y \forall x (P(x,y))$

2 т. **б)** $\exists y \forall x (P(x,y)) \rightarrow \forall x \exists y (P(x,y))$

2 т. **в)** $\forall x \exists y (P(x,y)) \leftrightarrow \forall y \exists x (P(y,x))$

Решение: Щом двата домейна са крайни, предикатът може да бъде описан недвусмислено с булева матрица $m \times n$, където m е мощността на първия домейн, а n, на втория. Във всяка клетка (i,j) на матрицата, единица означава, че предикатът е истина върху тази наредена двойка елементи, а нула, че е лъжа върху нея. Да разгледаме твърденията.

а) $\forall x \exists y (P(x,y)) \rightarrow \exists y \forall x (P(x,y))$. Това е не е вярно. В термините на матрицата, твърдението казва "ако за всеки ред има колона с поне една единица, то съществува колона само от единици". Контрапример: матрицата има единици по главния диагонал и нули извън него.

б) $\exists y \forall x (P(x,y)) \to \forall x \exists y (P(x,y))$. Това е вярно – ако има колона само от единици, то всеки ред има поне една единица.

в) $\forall x \exists y (P(x,y)) \leftrightarrow \forall y \exists x (P(y,x))$. Това е вярно. Консеквентът се получава от антецедента с просто преименуване на променливите: което е било x става y, което е било y става x. Очевидно самото твърдение остава същото, тоест антецедентът и консеквентът са еквиваленти, от което валидността на импликацията следва директно.

2 Втора Част

3 т. **Зад. 1** Намерете най-голямото число n, за което е вярно, че измежду 100 човека поне n на брой задължително са родени в един и същи месец. Обосновете отговора си.

Решение: $n = 9$. Първо ще покажем, че n не може да е 8. При дадени 12 месеца дори само за 97 човека е невъзможно да имаме не повече от 8 човека, родени в един и същи месец, защото Обобщеният Принцип на Дирихле казва, че при слагане на $8 \times 12 + 1 = 97$ предмета (хора) в 12 кутии (месеци), поне една кутия (месец) съдържа поне $8 + 1$ предмета (хора). От друга страна, възможно е n да бъде 9, защото може за 11 месеца, да речем януари до ноември, по 9 човека да са родени във всеки от тях, и в оставащия месец да има точно един човек. Следователно, 9 е точната долна граница на стойността, за която става дума.

Зад. 2 Дадена е група от n човека, родени през една и съща година, която не е високосна (следователно, има 365 дена).

4 т. **а)** Нека $n = 50$. По колко различни начина може да са рождените дни на тези хора, ако известно, че точно трима души имат един и същи рожден ден, а всички останали хора имат рождени дни, които са различни помежду си и са различни от рождения ден на тримата (с един и същи рожден ден)?

5 т. **б)** Нека $n = 1\,000$. По колко различни начина може да са рождените дни на хората, ако е всеки ден от годината е рожден ден на поне един човек?

Решение: В **а)**, по $\binom{50}{3}$ начина можем да подберем тези с еднаквия рожден ден, по 365 начина можем да определим точно кой ден да е това, и по

$$364 \times (364 - 1) \times \cdots \times (364 - 47 + 1)$$

можем да "раздадем" останалите 364 дена от годината на останалите 47 човека. Отговорът

$$\binom{50}{3} \times \prod_{k=318}^{365} k$$

е произведението от тези три числа. Численият отговор е число със 126 десетични цифри.

В **б)** става дума за броя на сюрекциите от 1000 елементен домейн в 365 елементен кодомейн. Съгласно изучаваното на лекции и упражнения, той е

$$\sum_{k=0}^{365} (-1)^k \binom{365}{k} (365 - k)^{1000}$$

Числено, тази сума има 2551 десетични цифри.

9 т. **Зад. 3** Във всеки граф, *срязващ връх* наричаме всеки връх, чието изтриване заедно с ребрата, в които той участва, води до увеличаване на броя на свързаните компоненти. Във всеки граф, *мост* наричаме всяко ребро, чието отстраняване (без да махаме краищата му) води до увеличаване на броя на свързаните компоненти. Нека $G = (V, E)$ е граф. Графът $L(G)$ се дефинира така: върховете на $L(G)$ са ребрата на G и два върха на $L(G)$ са съседи тогава и само тогава, когато в G те (спомняме си, че в G това са две ребра) имат общ връх. Докажете или опровергайте твърдението

Мостовете на G са точно срязващите върхове на $L(G)$.

Решение: Твърдението не е вярно. Контрапример: граф G с три върха и две ребра (имащи общ връх). Тогава $L(G)$ има два върха и едно ребро между тях. Очевидно G има два моста – всяко негово ребро е мост. Но $L(G)$ изобщо няма срязващи върхове, защото който и връх от двата да изтрием, броят на свързаните компоненти остава единица.

5 т. **Зад. 4** Дадена е следната булева функция

$$f(x, y, u, v, z) = \big((x \,|\, y) \rightarrow (u \downarrow v)\big) \rightarrow \big((u \downarrow v) \rightarrow z\big)$$

Докажете, че x и y са фиктивни (несъществени) променливи, като използвате *само еквивалентни преобразувания.* Можете да използвате само следните еквивалентни преорбазувания наготово:

- Свойствата на булевите функции идемпотентност, комутативност, асоциативност, дистрибутивност, закони на Де Морган, свойства на отрицанието, свойства на константите.
- Свойството на импликацията $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$.
- Свойството на стрелката на Пърс $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$.
- Свойството на чертата на Шефер $x_1 \,|\, x_2 = \overline{x_1 x_2}$.

Решение: Ще докажем помощно твърдение:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow z) = q \rightarrow z$$

Действително,

$$\begin{aligned}
&(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow z) = \quad \text{(свойство на импл.)}\\
&\overline{\overline{p} \vee q} \vee (\overline{q} \vee z) = \quad \text{(з-ни на Де Морган)}\\
&\overline{\overline{p}}\,\overline{q} \vee \overline{q} \vee z = \quad \text{(з-н за двойното отр.)}\\
&p\,\overline{q} \vee \overline{q} \vee z = \quad \text{(дистриб. на кон. спрямо диз.)}\\
&(p \vee 1)\overline{q} \vee z = \quad \text{(свойства на константите)}\\
&1\overline{q} \vee z = \quad \text{(свойства на константите)}\\
&\overline{q} \vee z = \quad \text{(свойство на импл.)}\\
&q \rightarrow z
\end{aligned}$$

Това е в сила за произволни формули p, q и z: не е задължително те да са просто променливи. Прилагаме току-що доказаното свойство върху $f(x, y, u, v, z)$ с $(x \,|\, y)$ като p и $(u \downarrow v)$ като q и получаваме

$$f(x, y, u, v, z) = \big((x \,|\, y) \rightarrow (u \downarrow v)\big) \rightarrow \big((u \downarrow v) \rightarrow z\big) = (u \downarrow v) \rightarrow z$$

Щом f има формула, в която не участват x и y, то това са фиктивни променливи. □

10 т. **Зад. 5, БОНУС** Колко булеви функции на n имат съвършени дизюнктивни нормални форми, в които се среща поне веднъж всяка буква-променлива без отрицание и се среща поне веднъж всяка буква-променлива с отрицание? Примерно, ако променливите са x, y и z, такава СъвДНФ е $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,z$, докато $\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z}$ не е такава, защото в нея няма $\overline{y}$.

Решение: Задачата е същата като задачата, ако A_1, A_2, …, A_n са двуелементни множества, колко са n-арните релации

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

за които е вярно, че всеки елемент от всеки домейн се съдържа в поне една наредена n-орка. Подобна задача имаше в четвъртото домашно.

Да се върнем на формулировката със СъвДНФ. Всички СъвДНФ над n променливи са $2^{2^n} - 1$, понеже има общо 2^n пълни елементарни конюнкции и всяка от тях може да бъде или да не бъде в съвършената ДНФ. Обаче в съвършената ДНФ не може да няма нито една такава елементарна конюнкция, тъй като празният стринг не го считаме за формула, оттук и -1 в израза. Универсумът са всички СъвДНФ.

Да сметнем колко СъвДНФ са такива, че за поне една променлива не се срещат двата ѝ литерала. Тази променлива можем да изберем по n начина. За всеки от тях се среща съответната буква или само с черта, или само без черта. За всеки от тези начини, броят е колкото е броят на всички СъвДНФ на $n-1$ променливи. Търсената бройка е

$$\binom{n}{1} 2^1 \left(2^{2^{n-1}}\right)$$

Изваждаме това количество от мощността на универсума и дотук имаме

$$\left(2^{2^n} - 1\right) - \binom{n}{1} 2^1 \left(2^{2^{n-1}} - 1\right)$$

Това не е окончателният отговор. Трябва да добавим броя на СънДНФ, в които за поне две променливи не се среща по един литерал на всяка, после да извадим броя на СъвДНФ, в които за поне три променливи не се среща по един литерал на всяка, и т.н., както се изисква от метода на включването и изключването. Отговорът е

$$\begin{aligned}\left(2^{2^n} - 1\right) &- \binom{n}{1} 2^1 \left(2^{2^{n-1}} - 1\right)\\ &+ \binom{n}{2} 2^2 \left(2^{2^{n-2}} - 1\right)\\ &- \binom{n}{3} 2^3 \left(2^{2^{n-3}} - 1\right)\\ &+ \dots\\ &+ (-1)^n \binom{n}{n} 2^n \left(2^{2^{n-n}} - 1\right)\end{aligned}$$

което може да запишем накратко така:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k \left(2^{2^{n-k}} - 1\right)$$

□