# 1 Първа Част

*5 т.* **Зад. 1** Докажете, че сечението на множества е дистрибутивно спрямо обединението на множества. Използвайте табличния метод.

**Решение:** Иска се да се докаже, че за произволни множества $A$, $B$ и $C$ е в сила $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \cup C$ | $A \cap (B \cup C)$ | $(A \cap B)$ | $(A \cap C)$ | $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

От това, че петата и осмата колона са равни следва, че $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

**Зад. 2** Едно множество $M \subset E$ от ребра на неориентирания граф $G(V, E)$ наричаме съвършено съчетание (perfect matching), когато няма две ребра от $M$ с общ връх и всеки връх на $G$ е край на ребро от $M$.

*3 т.* **а)** Намерете съвършено съчетание за графа на куба (3-мерния хиперкуб).

*5 т.* **б)** Намерете съвършено съчетание (или докажете съществуването му) за $n$-мерния хиперкуб.

**Решение:**

**а)** Нека имаме куб $ABCDA'B'C'D'$. Очевидно ребрата $AA', BB', CC', DD'$ образуват съвършено съчетание.

**б)** Ето три решения:

**(1)** Построяване на съчетание: Да означим с $\alpha = b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ една поредица от нули и единици с дължина $n-1$. Дописвайки 0 или 1 ще получим две поредици $\alpha 0$ и $\alpha 1$, които са съседни върхове в $n$-мерния хиперкуб. Следователно двойката $(\alpha 0, \alpha 1)$ е ребро в хиперкуба. Множеството от всички ребра, които получаваме по този начин от възможните $2^{n-1}$ различни поредици $\alpha$ образува съвършено съчетание.

**(2)** Доказателство по индукция:
Едномерният хиперкуб има единствено ребро, което е съвършено съчетание за него.
Нека допуснем, че $n-1$-мерният хиперкуб има съвършено съчетание. Множеството от върховете на $n$-мерния хиперкуб можем да разделим на 2 слоя - върхове от вида $\alpha 0$ и $\alpha 1$, където с $\alpha$ сме означили поредица от нули и единици с дължина $n-1$. Върховете от вида $\alpha 0$ и свързващите ги ребра образуват $n-1$-мерен хиперкуб, нека $M_0$ е едно съвършено съчетание за него. Нека $M_1$ е съвършено съчетание за другия слой – върховете от вида $\alpha 1$. Очевидно $M_0 \cup M_1$ образува съвършено съчетание за $n$-мерния хиперкуб, с което завършваме индуктивното доказателство.

**(3)** Доказателство чрез известно свойство:
Да използваме теоремата, че в $n$-мерния хиперкуб има хамилтонов цикъл за $n > 1$. Тъй като този граф има четен брой върхове и цикълът ще има четен брой ребра. Ако вземем всички четни ребра от цикъла, те ще образуват съвършено съчетание. Остава случаят $n = 1$, при който единственото ребро е съвършено съчетание.

**Зад. 3** Нека $A = \{1,2,3,4\}$, а $B$ е някакво крайно непразно $n$-елементно множество.

*2 т.* **а)** Колко са разбиванията на $A$ на точно две (непразни) подмножества? Напишете тези разбивания в явен вид.

*3 т.* **б)** Колко са разбиванията на $B$ на точно две (непразни) подмножества? Аргументирайте отговора си.

*4 т.* **в)** Ако $f(n,k)$ е броят на разбиванията на $B$ на точно $k$ непразни подмножества, където $1 < k \leq n$, докажете с комбинаторни разсъждения, че $f(n,k) = k \cdot f(n-1,k) + f(n-1,k-1)$.

**Решение:** Разбиванията на $A$ на две непразни множества са:

$$
\begin{array}{llll}
S_1 = \{\{1\},\{2,3,4\}\} & S_2 = \{\{2\},\{1,3,4\}\} & S_3 = \{\{3\},\{1,2,4\}\} & S_4 = \{\{4\},\{1,2,3\}\} \\
S_5 = \{\{1,2\},\{3,4\}\} & S_6 = \{\{1,3\},\{2,4\}\} & S_7 = \{\{1,4\},\{2,3\}\} &
\end{array}
$$

Разбиванията на $B$ на две непразни множества са $\frac{1}{2}(2^n - 2)$ на брой, тоест $2^{n-1} - 1$. Да видим защо. Нека $C$ е множеството $2^B \setminus (\emptyset \cup B)$. Очевидно $|C| = 2^n - 2$. $C$ се разбива на (множество от) ненаредени двойки, а именно $\{X, C \setminus X\}$ върху всички $X \in C$, и съществува биекция между множеството от тези двойки и въпросните разбивания. Двойките са на брой $\frac{1}{2}|C|$, с други думи $2^{n-1} - 1$.

Нека $C$ е множеството от разбиванията на $B$ на точно $k$ непразни подмножества, където $k > 1$. Да фиксираме произволен $a \in B$. Всеки елемент от $C$ (тоест, за всяко разбиване на $B$) съдържа $a$, щом говорим за разбиване. Има две взаимно изключващи се възможности: $a$ е в поднможество само по себе си, или $a$ е заедно с поне един друг елемент. Тоест, $C$ се разбива на две подмножества: тези разбивания, които съдържат елемент $\{a\}$, и тези разбивания, които не съдържат $\{a\}$. Разбиванията, съдържащи $\{a\}$, са $f(n-1, k-1)$ на брой, защото останалите $n-1$ елемента биват разбивани на $k-1$ подмножества, а тези, които не съдържат $\{a\}$ са $k \cdot f(n-1,k)$ съгласно следните съображения: ако махнем $a$, пак остават $k$ непразни подмножества, но сега те са разбивания на $n-1$ елемента, и елементът $a$ може да бъде сложен в кое да е от тях. По принципа на разбиването, $|C| = k \cdot f(n-1,k) + f(n-1,k-1)$. □

*5 т.* **Зад. 4** Нека рекурентното отношение $T(n)$ върху естествените числа е дефинирано така:

$$
\begin{aligned}
T(0) &= 0 \\
T(n) &= 2 \cdot T(n-1) + n \cdot 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

Намерете общото решение на $T(n)$.

**Решение:** Даденото отношение (без началното условие) е еквивалентно на

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + \frac{n}{2} \cdot 2^n$$

То не е хомогенно. Хомогенната част е $T(n) = 2 \cdot T(n-1)$. Характеристичното уравнение е

$$x - 2 = 0$$

с мултимножество от корени $\{2\}_M$. Нехомогенната част е $\frac{n}{2} \cdot 2^n$. Константата на $n$-та степен е 2, а полиномът, с който е умножена, е от първа степен. От нехомогенната част "идва" корен 2 с кратност $1 + 1 = 2$. С други думи, мултимножеството, идващо от нехомогенната част, е $\{2,2\}_M$. Обединението на двете мултимножества е $\{2,2,2\}_M$. Тогава общото решение е

$$T(n) = A2^n + Bn2^n + Cn^2 2^n$$

Това е достатъчно за пълен брой точки. За Ваше сведение, точното решение е $T(n) = \frac{1}{4}\left(n(n+1)2^n\right)$.

**Зад. 5, БОНУС** Нека $P(x,y)$ е произволен двуместен предикат върху произволни крайни непразни домейни. Кое от следните твърдения е вярно и кое, не? Аргументирайте отговорите си.

*2 т.* **а)** $\forall x \exists y (P(x,y)) \to \exists y \forall x (P(x,y))$

*2 т.* **б)** $\exists y \forall x (P(x,y)) \to \forall x \exists y (P(x,y))$

*2 т.* **в)** $\forall x \exists y (P(x,y)) \leftrightarrow \forall y \exists x (P(y,x))$

**Решение:** Щом двата домейна са крайни, предикатът може да бъде описан недвусмислено с булева матрица $m \times n$, където $m$ е мощността на първия домейн, а $n$, на втория. Във всяка клетка $(i, j)$ на матрицата, единица означава, че предикатът е истина върху тази наредена двойка елементи, а нула, че е лъжа върху нея. Да разгледаме твърденията.

**а)** $\forall x \exists y (P(x, y)) \to \exists y \forall x (P(x, y))$. Това е не е вярно. В термините на матрицата, твърдението казва "ако за всеки ред има колона с поне една единица, то съществува колона само от единици". Контрапример: матрицата има единици по главния диагонал и нули извън него.

**б)** $\exists y \forall x (P(x, y)) \to \forall x \exists y (P(x, y))$. Това е вярно – ако има колона само от единици, то всеки ред има поне една единица.

**в)** $\forall x \exists y (P(x, y)) \leftrightarrow \forall y \exists x (P(y, x))$. Това е вярно. Консеквентът се получава от антецедента с просто преименуване на променливите: което е било $x$ става $y$, което е било $y$ става $x$. Очевидно самото твърдение остава същото, тоест антецедентът и консеквентът са еквиваленти, от което валидността на импликацията следва директно.

## 2 Втора Част

*3 т.* **Зад. 1** Намерете най-голямото число $n$, за което е вярно, че измежду $100$ човека поне $n$ на брой задължително са родени в един и същи месец. Обосновете отговора си.

**Решение:** $n = 9$. Първо ще покажем, че $n$ не може да е $8$. При дадени $12$ месеца дори само за $97$ човека е невъзможно да имаме не повече от $8$ човека, родени в един и същи месец, защото Обобщеният Принцип на Дирихле казва, че при слагане на $8 \times 12 + 1 = 97$ предмета (хора) в $12$ кутии (месеци), поне една кутия (месец) съдържа поне $8 + 1$ предмета (хора). От друга страна, възможно е $n$ да бъде $9$, защото може за $11$ месеца, да речем януари до ноември, по $9$ човека да са родени във всеки от тях, и в оставащия месец да има точно един човек. Следователно, $9$ е точната долна граница на стойността, за която става дума.

**Зад. 2** Нека $f(x_1, x_2 ... x_n)$ е булева функция, а $N_f$ е множеството от двоични вектори, за които $f$ приема стойност $1$.

*5 т.* **а)** Докажете, че ако $f$ има фиктивна променлива, $|N_f|$ е четно.

*4 т.* **б)** Вярно ли е обратното ? Обосновете отговора си.

**Решение:**

**а)** Без ограничение на общността можем да приемем, че $x_n$ е фиктивна променлива на $f$.
Да означим с $\alpha = b_1 b_2 \dots b_{n-1}$ една поредица от нули и единици с дължина $n - 1$. Дописвайки $0$ или $1$ ще получим две поредици с дължина $n$ – $\alpha 0$ и $\alpha 1$, за които $f(\alpha 0) = f(\alpha 1)$. Следователно, на всяка поредица $\alpha$ ще съответстват два елемента на $N_f$ (единици в таблицата на $f$), когато $f(\alpha 0) = f(\alpha 1) = 1$, или нула елемента на $N_f$, когато $f(\alpha 0) = f(\alpha 1) = 0$.
Тези двойки елементи на $N_f$ (редове в таблицата) са непресичащи се множества, следователно $|N_f|$ е четно.

**b)** Обратното не е вярно, един контрапример е функцията $x \oplus y$.

*9 т.* **Зад. 3** Във всеки граф, *срязващ връх* наричаме всеки връх, чието изтриване заедно с ребрата, в които той участва, води до увеличаване на броя на свързаните компоненти. Във всеки граф, *мост* наричаме всяко ребро, чието отстраняване (без да махаме краищата му) води до увеличаване на броя на свързаните компоненти. Нека $G = (V, E)$ е граф. Графът $L(G)$ се дефинира така: върховете на $L(G)$ са ребрата на $G$ и два върха на $L(G)$ са съседи тогава и само тогава, когато в $G$ те (спомняме си, че в $G$ това са две ребра) имат общ връх. Докажете или опровергайте твърдението

Мостовете на $G$ са точно срязващите върхове на $L(G)$.

**Решение:** Твърдението не е вярно. Контрапример: граф $G$ с три върха и две ребра (имащи общ връх). Тогава $L(G)$ има два върха и едно ребро между тях. Очевидно $G$ има два моста – всяко негово ребро е мост. Но $L(G)$ изобщо няма срязващи върхове, защото който и връх от двата да изтрием, броят на свързаните компоненти остава единица.

*5 т.* **Зад. 4** Дадена е следната булева функция

$$f(x, y, u, v, z) = \big((x \mid y) \to (u \downarrow v)\big) \to \big((u \downarrow v) \to z\big)$$

Докажете, че $x$ и $y$ са фиктивни (несъществени) променливи, като използвате *само еквивалентни преобразувания*. Можете да използвате само следните еквивалентни преорбазувания наготово:

- Свойствата на булевите функции идемпотентност, комутативност, асоциативност, дистрибутивност, закони на Де Морган, свойства на отрицанието, свойства на константите.
- Свойството на импликацията $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$.
- Свойството на стрелката на Пърс $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$.
- Свойството на чертата на Шефер $x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2}$.

**Решение:** Ще докажем помощно твърдение:

$$(p \to q) \to (q \to z) = q \to z$$

Действително,

$$
\begin{aligned}
&(p \to q) \to (q \to z) = \quad \text{(свойство на импл.)}\\
&\overline{\overline{p} \vee q} \vee (\overline{q} \vee z) = \quad \text{(з-ни на Де Морган)}\\
&\overline{\overline{p}}\,\overline{q} \vee \overline{q} \vee z = \quad \text{(з-н за двойното отр.)}\\
&p\,\overline{q} \vee \overline{q} \vee z = \quad \text{(дистриб. на кон. спрямо диз.)}\\
&(p \vee 1)\overline{q} \vee z = \quad \text{(свойства на константите)}\\
&1\overline{q} \vee z = \quad \text{(свойства на константите)}\\
&\overline{q} \vee z = \quad \text{(свойство на импл.)}\\
&q \to z
\end{aligned}
$$

Това е в сила за произволни формули $p$, $q$ и $z$: не е задължително те да са просто променливи. Прилагаме току-що доказаното свойство върху $f(x, y, u, v, z)$ с $(x \mid y)$ като $p$ и $(u \downarrow v)$ като $q$ и получаваме

$$f(x, y, u, v, z) = \big((x \mid y) \to (u \downarrow v)\big) \to \big((u \downarrow v) \to z\big) = (u \downarrow v) \to z$$

Щом $f$ има формула, в която не участват $x$ и $y$, то това са фиктивни променливи. □

*10 т.* **Зад. 5, БОНУС** Колко булеви функции на $n$ имат съвършени дизюнктивни нормални форми, в които се среща поне веднъж всяка буква-променлива без отрицание и се среща поне веднъж всяка буква-променлива с отрицание? Примерно, ако променливите са $x$, $y$ и $z$, такава СъвДНФ е $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,z$, докато $\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z}$ не е такава, защото в нея няма $\overline{y}$.

**Решение:** Задачата е същата като задачата, ако $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ са двуелементни множества, колко са $n$-арните релации

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

за които е вярно, че всеки елемент от всеки домейн се съдържа в поне една наредена $n$-орка. Подобна задача имаше в четвъртото домашно.

Да се върнем на формулировката със СъвДНФ. Всички СъвДНФ над $n$ променливи са $2^{2^n} - 1$, понеже има общо $2^n$ пълни елементарни конюнкции и всяка от тях може да бъде или да не бъде в съвършената ДНФ. Обаче в съвършената ДНФ не може да няма нито една такава елементарна конюнкция, тъй като празният стринг не го считаме за формула, оттук и $-1$ в израза. Универсумът са всички СъвДНФ.

Да сметнем колко СъвДНФ са такива, че за поне една променлива не се срещат двата ѝ литерала. Тази променлива можем да изберем по $n$ начина. За всеки от тях се среща съответната буква или само с черта, или само без черта. За всеки от тези начини, броят е колкото е броят на всички СъвДНФ на $n-1$ променливи. Търсената бройка е

$$\binom{n}{1} 2^1 \left(2^{2^{n-1}}\right)$$

Изваждаме това количество от мощността на универсума и дотук имаме

$$\left(2^{2^n} - 1\right) - \binom{n}{1} 2^1 \left(2^{2^{n-1}-1}\right)$$

Това не е окончателният отговор. Трябва да добавим броя на СънДНФ, в които за поне две променливи не се среща по един литерал на всяка, после да извадим броя на СъвДНФ, в които за поне три променливи не се среща по един литерал на всяка, и т.н., както се изисква от метода на включването и изключването. Отговорът е

$$\begin{aligned}\left(2^{2^n} - 1\right) &- \binom{n}{1} 2^1 \left(2^{2^{n-1}-1}\right)\\ &+ \binom{n}{2} 2^2 \left(2^{2^{n-2}-1}\right)\\ &- \binom{n}{3} 2^3 \left(2^{2^{n-3}-1}\right)\\ &+ \dots\\ &+ (-1)^n \binom{n}{n} 2^n \left(2^{2^{n-n}-1}\right)\end{aligned}$$

което може да запишем накратко така:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^k \left(2^{2^{n-k}-1}\right)$$

$\square$