

Име: Ф№: Спец.: Гр.: ...

Задача	1	2	3	4	5	ОБЩО
получени точки						
от максимално	15	20	20	35	20	110

Можете да ползвате наготово всички неща, изучавани на лекции, освен ако в условието на задачата не е казано друго. Ако искате да ползвате неща, които не са изучавани на лекции, трябва да ги формулирате явно и да ги обосновате подробно.

Зад. 4 Нека $n \geq 2$. Даден е масив $A[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)]$ от наредени двойки от цели числа. Известно е, че

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : (1 \leq x_i < n^2 \wedge 1 \leq y_i < n^2)$$

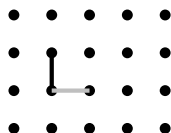
За всяко $i \in \{1, \dots, n\}$ дефинираме, че $x_i + n^{y_i}$ е *степенна* на (x_i, y_i) . Опишете алгоритъм със сложност по време $O(n)$, който сортира масива по степените на елементите. Не е необходимо да пишете подробен псевдокод или да доказвате коректността с инвариант или по индукция. Достатъчно е да опишете идеята ясно и недвусмислено и да дадете съвсем кратка аргументация за коректността и сложността.

Внимание! Вашият алгоритъм може да извършва степенувания n^y , било в явен, било в неявен вид, само ако y е константа, но не и в общия случай.

Зад. 5 Нека $n, m \in \mathbb{N}^+$. Представете си точките (i, j) за $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$. Върху тези точки се играе игра от играчи **A** и **B**. Те се редуват, като първо играе **A**. Всеки играч, когато е на ход, слага

- или хоризонтална отсечка между (i, j) и $(i, j + 1)$ за някои i и j , такива че $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j < m$,
- или вертикална отсечка между (i, j) и $(i + 1, j)$ за някои i и j , такива че $1 \leq i < n$ и $1 \leq j \leq m$,

но само ако между тези точки досега не е сложена отсечка. Нека отсечките на **A** са черни, а тези на **B** са сиви. Ако $n = 4$, $m = 5$ и **A** сложи $(2, 2) - (3, 2)$, а **B** сложи $(2, 2) - (2, 3)$, нещата изглеждат така:



Целта на **A** е да направи затворена крива (контур) от черни отсечки. Целта на **B** е да попречи на **A** да стори това. Следният алгоритъм описва играта, без да казва как играчите избират ходовете си:

АЛГОРИТЪМ 1

Докато може да бъдат сложени още отсечки:

- **A** слага отсечка
- ако може да се сложи отсечка, **B** слага отсечка

Разгледайте следния алгоритъм за избор на ход на **B**.

АЛГОРИТЪМ 2

Ако последният ход на **A** е бил $(i, j) - (i, j + 1)$, то,

- ако $i > 1$ и няма отсечка $(i - 1, j + 1) - (i, j + 1)$, сложи $(i - 1, j + 1) - (i, j + 1)$,
- в противен случай играй произволно,

В противен случай, нека последният ход на **A** е бил $(i, j) - (i + 1, j)$.

- Ако $j > 1$ и няма отсечка $(i + 1, j - 1) - (i + 1, j)$, сложи $(i + 1, j - 1) - (i + 1, j)$,
- в противен случай играй произволно.

Докажете, че АЛГОРИТЪМ 2 носи успех на **B**, използвайки инвариант за АЛГОРИТЪМ 1.