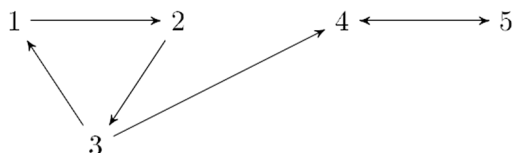


Приложения

Построяване на граф на компонентите



След намиране на всички силно свързани компоненти можем да конструираме *кондензиран граф* (граф на компонентите). В този граф всеки връх представлява една силно свързана компонента, а между два върха има ребро, ако съществува ребро между някой връх от първата компонента към някой връх от втората в оригиналния граф. Кондензиращият граф винаги е ацикличен (ОАГ).

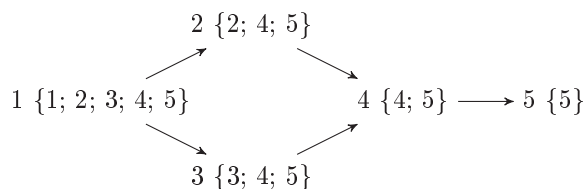
$$C1 \longrightarrow C2$$

В примера по-горе компонентите са $C1 = \{1; 2; 3\}$ и $C2 = \{4; 5\}$ и има ребро $C1 \rightarrow C2$, защото в оригинала има ребро $3 \rightarrow 4$.

Примерна задача за максимално достигане на върхове

Нека разгледаме задача: Имам ориентиран граф с моите приятели. Всеки мой приятел е връх на графа. Ребрата на графа означават следното: ако мой приятел научи някаква новина, той я казва на всички приятели, към които излизат ребра от неговия връх. Аз съм научил някаква новина, но имам право само на едно телефонно обаждане (например батерията на телефона ми ще свърши всеки миг). На кого от приятелите си да я съобщя, така че възможно най-много от тях да я научат? Нека $dp(v)$ е множеството от върховете, достижими от v , вкл. v . Използваме динамично програмиране върху ОАГ: след топологично сортиране изчисляваме за всеки връх v стойността

$$dp(v) = \{v\} \cup \bigcup_{(v \rightarrow u) \in E} dp(u).$$



Например

$$dp(1) = \{1\} \cup dp(2) \cup dp(3) = \{1\} \cup \{2; 4; 5\} \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Връщане към оригиналната задача

Прилагаме този подход към разпространение на новина в ориентиран граф с цикли. Следващите стъпки обобщават метода:

1. Намери компонентите на силна свързаност (ССК) в оригиналния граф.
2. Построй нов граф (**кондензирания граф**), в който всеки връх отговаря на ССК.
3. Състави списък $g(u)$ за всеки връх u от новия граф — върховете в съответната компонента.
4. Извърши топологично сортиране на новия граф.
5. За всеки връх v от кондензирания граф намери с динамично програмиране (по формулата от предишната страница) множеството $\text{dp}(v)$ от върховете, достижими от v , вкл. v .
6. За всеки връх v на кондензирания граф изчисли броя $f(v)$ на върховете на оригиналния граф, достижими от който да е връх на компонентата, вкл. самия връх, по следната формула:

$$f(v) = \sum_{u \in \text{dp}[v]} \text{length}(g(u)).$$

7. Накрая избири върха u с максимално $f(u)$ — това е компонентата, от която стартирането на новината води до максимално достигане.

Примерен изчислителен процес

$$C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow C_4$$

Нека $g(C_1) = 3$, $g(C_2) = 1$, $g(C_3) = 3$, $g(C_4) = 1$. Изчисляваме:

$$\begin{aligned} f(C_4) &= 1; \\ f(C_3) &= 3 + f(C_4) = 4; \\ f(C_2) &= 1 + f(C_3) = 5; \\ f(C_1) &= 3 + f(C_2) = 8. \end{aligned}$$

Следователно оптимално е да предадем новината на някой връх от C_1 , например връх 0, 1 или 2.