

Домашна работа 2 по ДС

Май 2025

Задача 1. Докажете, че граф G е двуделен тогава и само тогава, когато всеки подграф H на G има антиклика, съдържаща поне половината от върховете на H (закръглено нагоре, т.е. $\lceil \frac{|V(H)|}{2} \rceil$).

Решение. $(\Rightarrow)$ Нека графът G е двуделен и H е негов подграф. Тогава поне $\lceil \frac{|V(H)|}{2} \rceil$ от върховете на H са в единия дял (по Дирихле). Но щом са в един дял, то няма ребра помежду им, тоест тези върхове образуват антиклика. $\checkmark$

$(\Leftarrow)$ Обратно, всеки подграф H на G има антиклика, съдържаща поне половината от върховете на H . Да допуснем, че G не е двуделен, тогава в G има цикъл C с нечетна дължина. В частност този цикъл е и подграф на G . Според допускането съществува антиклика, съдържаща поне $\lceil \frac{|V(C)|}{2} \rceil$ от върховете на C , но понеже броят върхове е нечетен, измежду всеки $\lceil \frac{|V(C)|}{2} \rceil$ върха на цикъла ще има два съседни. Значи между тях има ребро, но това е противоречие с предположението, че те са част от антиклика. Остава G да е двуделен. $\blacksquare$

Задача 2. В група има поне $n^2 + 1$ човека. Известно е, че за всеки двама непознати всеки от останалите или е техен общ познат, или е техен общ непознат. Да се докаже, че съществува група от $n + 1$ души, всеки двама от които са познати, или група от $n + 1$ души, всеки двама от които са непознати.

Решение. Възможни са различни решения на задачата, но тук ще представим едно, което илюстрира интересно приложение на релациите в контекста на графи (впрочем със същата техника по хубав начин може да бъде доказана *Теорема на Туран*).

Моделираме задачата с неориентиран граф $G = (V, E)$, чиито върхове са хората и ребра познаничествата (между два върха има ребро точно когато двамата човека се познават). Тогава исканото от условието се свежда до това да докажем, че в графа G има $(n + 1)$ -клика или $(n + 1)$ -антиклика, но това е еквивалентно на това да докажем, че в графа допълнение $\bar{G}$ има $(n + 1)$ -клика или $(n + 1)$ -антиклика.

Нека релацията $\sim \subseteq V \times V$ е дефинирана като: $v \sim u \Leftrightarrow (v, u) \notin E$. Твърдим, че $\sim$ е релация на еквивалентност:

рефлексивност: понеже никой човек не познава себе си (вероятно не само в рамките на задачата...) $\forall v \in V : (v, v) \notin E \Rightarrow \forall v \in V : v \sim v$. $\checkmark$

симетричност: за произволни два различни върха $v, u \in V : v \sim u \Leftrightarrow (v, u) \notin E \Leftrightarrow (u, v) \notin E \Leftrightarrow u \sim v$. $\checkmark$

транзитивност: нека $v, u, w \in V, v \sim u$ и $u \sim w$. Да обърнем внимание, че изродените случаи (когато стойностите на някои от v, u, w съвпадат) следват от рефлексивността и симетричността, така че ще считаме, че $v \neq u \neq w \neq v$. От $v \sim u$ и $u \sim w$ следва $(v, u), (u, w) \notin E$, тогава условието задължава $(v, w) \notin E \Rightarrow v \sim w$. $\checkmark$

Релацията $\sim$ задава разбиване на множеството на върховете. Да забележим, че $v \sim u$ на практика съответства на ребро (съответствието е сюрективно) от графа допълнение $\bar{G}$, като изключение правят $v \sim v$, понеже примки в $\bar{G}$ няма (но пък това и не влияе на следващите разсъждения). Тогава разбиването на върховете, определено от релацията, отговаря на разбиването по компоненти на свързаност в $\bar{G}$, т.е. всеки клас на еквивалентност отговаря на една компонента. Това влече, че всяка компонента на свързаност на $\bar{G}$ е пълен граф. Ако в някоя компонента има поне $n + 1$ върха, то те задават и $(n + 1)$ -клика, при което твърдението е доказано. Ако допуснем, че в $\bar{G}$ няма $(n + 1)$ -клика, във всяка компонента има не повече от n върха. Тогава броят свързани компоненти

на $\overline{G}$ е $\geq \lceil \frac{n^2+1}{n} \rceil = n+1$. Но това означава, че можем да изберем по един връх от всяка компонента, като така получаваме $(n+1)$ -антиклика. ■

Задача 3. Докажете, че ребрата на всеки прост граф могат да бъдат ориентирани така, че $\forall v \in V : |d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$.

Решение. За начало можем да направим наблюдението, че ако дадена ориентация отговаря на условието, то обратната ориентация, получена при обръщане на посоките на всяко от ребрата, също върши работа, на практика това разменя единствено стойностите $d(u)^+$ и $d(u)^-$, съответно разликата $d^+(v) - d^-(v)$ само променя знака си.

Ще докажем твърдението първо за дървета с индукция по броя върхове.

База: Твърдението очевидно е изпълнено за тривиалния граф (с единствен връх).

ИП: Нека за някое $n \in \mathbb{N}^+$ е в сила, че ребрата на всяко дърво с по-малко от n върха могат да бъдат ориентирани по искания начин.

ИС: Нека $T = (V, E)$ има точно n върха и $v \in V$ е произволен такъв. Нека $u_1, \dots, u_k$ са съседите на v в дървото, ясно е, че по отношение на $T - v$ те са в отделни компоненти на свързаност (иначе би имало цикъл в T). Нека дадем ориентация на половината инцидентни ребра на v (да кажем първите $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$) в посока от v към u_i ($1 \leq i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$), а останалите да насочим по посока към v . Ясно е, че така $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$. Разглеждаме съсед $u_i \in N(v)$ на връх v . В графа $T - v$ компонентата, в която u_i се намира, е дърво, тогава за нея можем да ползваме ИП. Значи съществува ориентация на върховете в компонентата такава, че исканото свойство е в сила. При същата ориентация в самото T всеки връх от тази компонента, с изключение на u_i , не променя степента си (нито тази на вход, нито тази на изход). Възможно е обаче е насочването на реброто $\{v, u_i\}$ да "счупи" свойството, т.е. да получим $|d^+(u_i) - d^-(u_i)| = 2$. Достатъчно е да използваме наблюдението от началото на задачата и да обърнем посоката на ребрата в компонентата на u_i . Както казахме, това би сменило знака на $d_{T-v}^+(u_i) - d_{T-v}^-(u_i)$ (по отношение на графа $T - v$). Лесно се вижда, че това вече ще даде търсеното $|d^+(u_i) - d^-(u_i)| \leq 1$ по отношение на T . ✓

Сега обаче да покажем задачата и в общия вид, нека G е произволен граф. Ако в G има цикъл, то можем да насочим ребрата в цикъла в една и съща посока, което просто би повлияло на степените на вход и изход за всеки връх от цикъла с единица. Понеже двете се "неутрализират", можем да се абстрахираме изцяло от този цикъл и да решаваме задачата в останалия граф. Ако в графа все още има цикъл, повтаряме разсъждението. Този процес по премахване на цикли (формално индукция по брой цикли в графа) може да се продължи до получаване на гора (което би било база на тази индукция). По-горе показахме, че ребрата на дърветата могат да се насочат по искания начин, оттук следва, че и ребрата на G също могат да бъдат насочени така. ■