

## Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите (СУ, ФМИ, летен семестър на 2024 / 2025 уч. г.)

**Задача 1.** Да се докаже, че  $p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(n) < p(2n)$  за всяко естествено число  $n$ , където  $p(n)$  е броят на целочислените разбивания на  $n$ .

**Решение:** Правим следните наблюдения:

Броят разбивания на  $2n$ , в които най-голямото събираемо е  $n$ , е точно  $p(n)$ . По-точно:

$$\begin{array}{ll} 2n = n + n & n = n \\ = n + (n-1) + 1 & = (n-1) + 1 \\ = n + (n-2) + 2 & = (n-2) + 2 \\ = \dots & = \dots \\ = n + 1 + 1 + \dots + 1 & = 1 + 1 + \dots + 1 \end{array}$$

Броят разбивания на  $2n$ , в които най-голямото събираемо е  $n+1$ , е точно  $p(n-1)$ . Отново:

$$\begin{array}{ll} 2n = (n+1) + (n-1) & n-1 = (n-1) \\ = (n+1) + (n-2) + 1 & = (n-2) + 1 \\ = (n+1) + (n-3) + 2 & = (n-3) + 2 \\ = \dots & = \dots \\ = (n+1) + 1 + \dots + 1 & = 1 + 1 + \dots + 1 \end{array}$$

По този начин стигаме до извода, че броят разбивания на  $2n$ , в които най-голямото събираемо е  $n+k$ , е точно  $p(n-k)$  за  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Това обаче не са всички разбивания на  $2n$ . Не сме преброили например  $2n = 2n$ , затова е изпълнено неравенството

$$p(1) + p(2) + p(3) + \dots + p(n) < p(2n).$$

**Задача 2.** Имаме два еднакви квадратни листа, всеки с лице  $n$  квадратни сантиметра. Всеки лист е разделен на  $n$  многоъгълника, всеки с лице 1 кв. см, като двете разделяния могат да са различни. Налагаме листовите един върху друг така, че да съвпадат. Докажете, че можем да забием  $n$  кабарчета така, че всички многоъгълници да бъдат прободени.

**Решение:** За всяко цяло  $k$  от 1 до  $n$  включително всеки  $k$  многоъгълника от единия лист покриват общо точно  $k$  кв.см, следователно, те общо се припокриват (пълно или частично) с поне  $k$  многоъгълника от другия лист (иначе съответните  $k$  кв. см върху другия лист биха били покрити с по-малко от  $k$  многоъгълника, всеки с лице 1 кв. см, което е невъзможно). От теоремата на Хол следва, че съществува биекция между многоъгълниците от двата листа: всеки многоъгълник от единия лист се припокрива (в поне една точка) с многоъгълник от другия лист. В тези точки забиваме  $n$  кабарчета; така пробождаме всички многоъгълници.

**Задача 3.** Да се докаже, че броят на разбиванията на числото 2020 на десет събираеми е равен на броя на разбиванията на числото 2065 на десет събираеми, две по две различни.

**Решение:** Щом сред десетте събираеми на 2065 няма равни, то най-малкото събираемо е поне 1, второто най-малко е поне 2, третото е поне 3, деветото е поне 9, а най-голямото е поне 10, но не повече от  $2065 - (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 2020$ .

От всяко разбиване на 2065 на десет различни събираеми получаваме разбиване на 2020 пак на десет събираеми, обаче не непременно различни, като извършим следните стъпки: от най-голямото събираемо вадим 9, от второто най-голямо вадим 8, от третото вадим 7 . . . от деветото събираемо вадим 1, а от десетото събираемо не вадим нищо.

*Пример:* От разбиването

$$2065 = 2020 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

получаваме

$$2020 = 2011 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Долните граници от първия абзац гарантират, че разликите са положителни числа. Тъй като всяко събираемо на 2065 е поне с единица по-голямо от следващото събираемо, а умалителят му е точно с единица по-голям от умалителя на следващото събираемо, то всяко събираемо на 2020 е по-голямо или равно на следващото.

Обратно, от всяко разбиване на 2020 на десет събираеми, не непременно различни, можем да получим разбиване на 2065 на десет събираеми, две по две различни, прилагайки обратното преобразуване: към най-голямото събираемо на 2020 добавяме 9, към следващото добавяме 8, към третото събираемо добавяме 7, . . . , към предпоследното събираемо добавяме 1. Сборът става  $2020 + (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 2065$ , а новите десет събираеми образуват намаляваща редица (значи, са две по две различни), защото на по-голямо събираемо на 2020 даваме по-голяма добавка (първото от двете споменати неравенства може да е нестрого).

Така получаваме взаимноеднозначно съответствие между интересувашите ни разбивания — разбиванията на естественото число 2065 на десет събираеми, които са две по две различни, и разбиванията на числото 2020 на десет събираеми, не непременно различни. Щом има биекция, то двата вида разбивания са равен брой.

#### Задача 4.

Правоъгълник с водоравни и отвесни страни е разделен на  $m \times n$  клетки с общо  $(m+1)(n+1)$  върха. Нека  $f(m; n)$  е броят на всички пътища от горния ляв до долния десен ъгъл, образувани от страните на клетките без повтаряне на върхове. Докажете, че  $f(m; n) \leq 2^{mn}$ .

#### Доказателство:

Да допълним произволен път с крива от долния десен до горния ляв ъгъл, преминаваща отдясно и над правоъгълника. Пътят и кривата образуват затворен контур без кратни точки. Във вътрешността на контура попадат някои клетки на правоъгълника, тоест пътят задава множество от клетки. Обратно, всяко множество от клетки на правоъгълника задава най-много един път от горния ляв до долния десен ъгъл: добавяме  $\Gamma$ -образната област, оградена от горната и дясната страна на правоъгълника плюс кривата; от контура на получената фигура махаме кривата; остава търсеният път. Затова броят на пътищата не надвишава броя на множествата от клетки, тоест  $f(m; n) \leq 2^{mn}$ . Тъй като не всяко множество от клетки задава път, (може остатъкът от контура да е несвързан), то неравенството е строго при достатъчно големи  $m$  и  $n$ .

Задачата е от състезание в Канада, проведено през 1977 г.

**Задача 5.** Всеки изпъкнал  $n$ -ъгълник може да се раздели на триъгълници чрез  $n - 3$  непресичащи се диагонала. По колко начина е възможно това? Върховете на  $n$ -ъгълника са различни, например номерирани са от 1 до  $n$ .

*Решение:* Това разделяне на триъгълници се нарича триангулация. Нека  $T_n$  е броят на триангулациите на изпъкналия  $n$ -ъгълник  $A_1 A_2 \dots A_n$ ,  $n \geq 3$ . Очевидно  $T_3 = 1$  (всеки триъгълник е триангулация на себе си). При  $n > 3$  разглеждаме една фиксирана страна на многоъгълника, например  $A_1 A_2$ . При всяка триангулация тя участва в точно един триъгълник:  $\triangle A_1 A_2 A_i$ . Ако  $i = 3$  или  $i = n$ , след премахването на  $\triangle A_1 A_2 A_i$  остава изпъкнал  $(n - 1)$ -ъгълник:  $A_1 A_3 A_4 \dots A_n$  или  $A_1 A_2 \dots A_{n-1}$  съответно. В тези случаи има по  $T_{n-1}$  триангулации. Ако  $4 \leq i \leq n - 1$ , премахването на  $\triangle A_1 A_2 A_i$  води до разпадане на дадения  $n$ -ъгълник на два изпъкнали многоъгълника:  $A_2 A_3 A_4 \dots A_i$  и  $A_1 A_i A_{i+1} \dots A_n$  със съответно  $i - 1$  и  $n - i + 2$  страни. Броят на тези триангулации е  $T_{i-1} T_{n-i+2}$ . Сумираме по стойностите на  $i$ :

$$T_n = T_{n-1} + \sum_{i=4}^{n-1} T_{i-1} \cdot T_{n-i+2} + T_{n-1};$$

$$T_n = 1 \cdot T_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-2} T_i T_{n-i+1} + T_{n-1} \cdot 1;$$

$$T_n = T_2 T_{n-1} + \sum_{i=3}^{n-2} T_i T_{n-i+1} + T_{n-1} T_2 \text{ (нека за удобство } T_2 = 1);$$

$$T_n = T_2 T_{n+1-2} + \sum_{i=3}^{n-2} T_i T_{n+1-i} + T_{n-1} T_{n+1-(n-1)};$$

$\Rightarrow T_n = \sum_{i=2}^{n-1} T_i T_{n+1-i}$ . Това е същата рекурентна връзка като при числата на Каталан, само индексите на членовете са изместени с 2 напред, т.е.  $T_n = C_{n-2}$ .

**Задача 6.** Целите числа от 1 до  $n$  вкл. (в този ред) са написани в кръг. Разбиваме числата на групи и свързваме две по две числата от всяка група. Разбиването се нарича непресичащо се, ако не се пресичат никои две хорди от различни групи. Намерете броя на непресичащите се разбивания.

*Решение:* Да означим търсения брой разбивания с  $D_n$ . Очевидно  $D_0 = 1$ . При  $n > 0$  разглеждаме две възможности. Ако числото  $n$  е само в група, то всъщност броим непресичащите се разбивания на числата от 1 до  $n-1$ ; техният брой е  $D_{n-1}$  по определение. В противен случай да означим с  $M$  най-малкото число от групата на числото  $n$ . Следователно  $1 \leq M \leq n-1$  и има хорда между точките  $M$  и  $n$ . Тази хорда разбива кръга на две части: числата  $1, 2, 3, \dots, M-1$  се свързват само помежду си или с  $M$  и  $n$ ; числата  $M+1, M+2, \dots, n-1$  също се свързват единствено помежду си или с числата  $M$  и  $n$ . Всяка от двете дъги заедно с хордата между  $M$  и  $n$  е хомеоморфна на окръжност, затова задачата се разпада на две подзадачи. Едната подзадача съдържа числата  $1, 2, 3, \dots, M-1, M$  и  $n$  (общо  $M+1$ ), а другата — числата  $M, M+1, M+2, \dots, n-1$  и  $n$  (общо  $n-M+1$ ). Трябва да отчетем и това, че числата  $M$  и  $n$  задължително са в една група. Понеже се намират на съседни места във всяка от двете подзадачи, имаме право да ги отъждествим. Така първата подзадача съдържа  $M$  числа, а втората съдържа  $n-M$  числа. От минималното свойство на  $M$  следва, че отъждествените  $M$  и  $n$  не се свързват с никоя точка от първата задача, затова можем да ги премахнем и в нея остават  $M-1$  числа (от 1 до  $M-1$ ). Ето защо броят на непресичащите се разбивания е равен на  $D_{M-1} D_{n-M}$ . Сумираме по стойностите на  $M$  и добавяме решенията от първия случай. Получава се следното рекурентно уравнение:

$$D_n = \sum_{M=1}^n D_{M-1} D_{n-M} = \sum_{M=0}^{n-1} D_M D_{n-1-M}.$$

Така лесно се вижда, че  $D_n = C_n$ .

### Задача 7 (USAMO, 2008 г.).

Нека  $n$  е цяло положително число. Със знака  $S_n$  означаваме множеството от точки  $(x; y)$  с целочислени координати, такива че

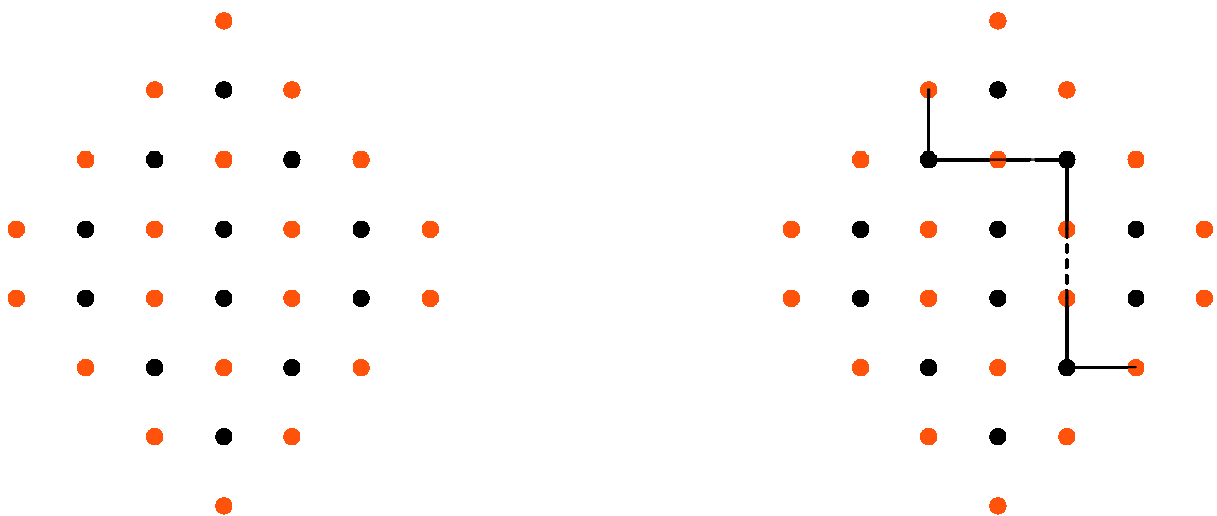
$$|2x| + |2y + 1| < 2n.$$

Път наричаме редица от различни точки в  $S_n$ , за която поредните точки са на разстояние 1 една от друга. Докажете, че множеството  $S_n$  не може да се разбие на по-малко от  $n$  пътя.

#### Доказателство:

Всяка точка от  $S_n$  оцветяваме в черен или червен цвят по такъв начин, че всеки ред започва и завършва с червена точка и цветовете се редуват. Оцветяването е подобно на шахматно, обаче средните два реда са еднакви.

Пример за  $n = 4$ :



Нека множеството  $S_n$  от черни и червени точки се разделя на  $m$  пътя. Подразделяме всеки от тях при срещане на последователни червени точки. Това става само с  $n$ -те червени двойки точки на средните два реда. Сега имаме  $m + k$  пътя, във всеки от които цветовете се редуват,  $0 \leq k \leq n$ . От редуването на цветовете следва, че всеки от тези  $m + k$  пътя съдържа най-много една червена точка повече от черните. Ето защо общият брой на червените точки надвишава броя на черните точки с не повече от  $m + k$ . От друга страна, червените точки са тъкмо с  $2n$  повече от черните, следователно  $2n \leq m + k \leq m + n$ , откъдето следва неравенството  $m \geq n$ .

### Задача 8 (МОМ 1996).

Дадено е естествено число  $r$  и правоъгълник  $ABCD$ ,  $|AB| = 20$ ,  $|BC| = 12$ . Правоъгълникът е разделен на  $20 \times 12$  единични квадратчета. Разрешен е ход от едно квадратче в друго само ако разстоянието между центровете им е равно на  $\sqrt{r}$ . Търсим редица от ходове, водещи от квадратчето на връх  $A$  до квадратчето на връх  $B$ .

- а) Докажете, че няма такава редица от ходове, ако  $r$  се дели на 2 или на 3.
- б) Докажете, че има такава редица от ходове при  $r = 73$ .
- в) Има ли редица от ходове при  $r = 97$ ?

#### Решение:

а) Нека ходът е  $a$  единици в едната посока и  $b$  единици перпендикулярно. Тогава  $a^2 + b^2 = r$ . Ако  $r$  се дели на 2, то  $a$  и  $b$  имат една и съща четност. Следователно от началното поле са достижими само полета със същия цвят (при стандартното шахматно оцветяване). Клетките на върховете  $A$  и  $B$  са с различни цветове, затова са недостижими една от друга.

Точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 3. Ако 3 дели  $r$ , то  $a$  и  $b$  се делят на 3. Затова, ако началното поле има координати  $(0 ; 0)$ , ще бъдат достижими само полета от вида  $(3m ; 3n)$ . Крайното поле  $(19 ; 0)$  не е от този вид, затова не може да бъде достигнато.

б) Нека  $r = 73 = 8^2 + 3^2$ . Нека има  $a$  хода от тип  $(x ; y) \rightarrow (x + 8 ; y + 3)$ ,  $b$  хода от тип  $(x ; y) \rightarrow (x + 3 ; y + 8)$ ,  $c$  хода от тип  $(x ; y) \rightarrow (x + 8 ; y - 3)$ ,  $d$  хода от тип  $(x ; y) \rightarrow (x + 3 ; y - 8)$ . Останалите възможности тълкуваме като отрицателни ходове. За движение от  $(0 ; 0)$  до  $(19 ; 0)$  важи системата

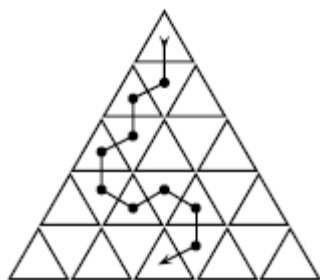
$$\begin{cases} 8(a + c) + 3(b + d) = 19 \\ 3(a - c) + 8(b - d) = 0. \end{cases}$$

Едно решение е  $a = 5$ ,  $b = -1$ ,  $c = -3$ ,  $d = 2$ . С опитване намираме редицата  $(0 ; 0) \rightarrow (8 ; 3) \rightarrow (16 ; 6) \rightarrow (8 ; 9) \rightarrow (11 ; 1) \rightarrow (19 ; 4) \rightarrow (11 ; 7) \rightarrow (19 ; 10) \rightarrow (16 ; 2) \rightarrow (8 ; 5) \rightarrow (16 ; 8) \rightarrow (19 ; 0)$ .

в) Ако  $r = 97$ , то  $a = 9$ ,  $b = 4$ . Нека началното и крайното поле са съответно  $(0 ; 0)$  и  $(19 ; 0)$ . Ходовете, които променят  $y$  с 4, ни въвеждат или извеждат от ивицата  $y = 4, 5, 6$  или  $7$  и променят четността на  $x$ . Другите ходове нито ни въвеждат, нито ни извеждат от ивицата и запазват четността на  $x$ . Ходовете от първия тип трябва да бъдат четен брой: в началото и в края сме извън ивицата. Но пък трябва да са нечетен брой: четността на  $x$  е различна в началото и в края (0 и 19). Значи, няма редица от ходове.

### Задача 9 (Канада, 2005 г.).

Равностранен триъгълник с дължина на страната  $n$  е разделен на единични триъгълници, както е показано на чертежа. Нека  $f(n)$  е броят на пътищата от най-горния триъгълник до средния триъгълник на най-долния ред, такива че всеки два съседни триъгълника в пътя споделят обща страна и пътят никога не се движи от по-долен към по-горен ред. Триъгълник може да бъде посетен най-много веднъж. Примерен път е показан за  $n = 5$ . Пресметнете  $f(2005)$ .



#### Решение:

Наричаме *последен* триъгълник в даден ред онзи триъгълник, който пътят посещава последно в този ред, преди да слезе на следващия. От последния триъгълник на ред №  $k$  пътят продължава право надолу, а после — към последния триъгълник на ред №  $k + 1$ . Следователно има точно един път, съдържащ дадено множество от последни триъгълници. За  $1 \leq m \leq n - 1$  има точно  $m$  възможни последни триъгълника на ред №  $m$ . Последният триъгълник на последния ред винаги е в центъра (по условие). По правилото за умножение пресмятаме  $f(n) = (n - 1)!$ , откъдето следва, че  $f(2005) = 2004!$ .

**Задача 10.** Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=m}^{n-r} \binom{k}{m} \binom{n-k}{r} = \binom{n+1}{m+r+1}.$$

**Доказателство:** Да разгледаме задачата: по колко начина можем да изберем  $m + r + 1$  числа измежду числата  $1, 2, 3, \dots, n + 1$ ? От една страна, това става по  $\binom{n+1}{m+r+1}$  начина, което е дясната страна на тъждеството. От друга страна, нека  $k + 1$  е  $(m + 1)$ -ото избрано число (броено от малките към големите),  $k = m, m + 1, m + 2, \dots, n - r$ . Трябва да изберем  $m$  числа, по-малки от  $k + 1$ , и  $r$  числа, по-големи от  $k + 1$ , за това има  $\binom{k}{m} \binom{n-k}{r}$  начина. Накрая сумираме по всевъзможните стойности на  $k$  и получаваме лявата страна на тъждеството.

**Задача 11.** Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^3 = \sum_{r=\lceil n/2 \rceil}^n \binom{n}{r}^2 \binom{2r}{n}.$$

**Доказателство:** Дясната страна е решение на следната комбинаторна задача: От  $n$  момчета и  $n$  момичета по колко начина можем да предложим за награда по равен брой от тях и после да наградим общо  $n$  от предложените кандидати (а другите кандидати да оставим без награда)? Числото  $r$  е равно на броя на предложените момчета, а също на броя на предложените момичета; едните избираме по  $\binom{n}{r}$  начина, другите — също по  $\binom{n}{r}$  начина; а по  $\binom{2r}{n}$  начина награждаваме  $n$  от всички  $2r$  кандидати. В лявата страна броим същото иначе:  $k$  е броят на наградените момчета,  $n - k$  е броят на наградените момичета, избираме ги по  $\binom{n}{k}$  и  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  начина; от другите  $n$  деца по  $\binom{n}{k}$  начина бележим  $k$ , сред които момчетата предлагаме за награда, но не награждаваме, а момчетата не предлагаме за награда (предлагаме, без да награждаваме, само неотбелязаните момчета). Отбелязаните  $k$  деца са  $x$  момичета и  $k - x$  момчета. Момчетата, предложени за награда, са  $n - k$  със и  $x$  без награди, общо  $n - k + x$ . Момчетата, предложени за награда, са общо  $n - (k - x) = n - k + x$ . Ето защо равен брой момчета и момичета ( $n - k + x$ ) са предложени за награждаване.

**Задача 12.** Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n} \cdot 2^{n-k} = 4^n.$$

**Доказателство:** Да разгледаме следната комбинаторна задача: колко измежду подмножествата на  $U = \{1, 2, 3, \dots, 2n+1\}$  съдържат поне  $n+1$  елемента? От една страна,  $(n+1)$ -ият елемент на такова множество (броен от малките към големите числа) е равен на  $n+k+1$  за някое  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ . Измежду числата преди него  $(1, 2, 3, \dots, n+k)$  трябва да изберем (без определен ред) точно  $n$  броя, а това става по  $\binom{n+k}{n}$  начина. Измежду числата след него (техният брой е  $n-k$ ) избираме произволен брой, което става по  $2^{n-k}$  начина, понеже за всяко число има две възможности: да го изберем или не. Всеки избор на малки числа се съчетава с всеки избор на големи, оттук идва умножението. Сумирането е заради разбиването по  $k$ . Така лявата страна на тъждеството е търсеният брой подмножества. Дясната страна: на всяко подмножество  $A$  на  $U$  съпоставяме допълнението му  $\overline{A}$ . Измежду  $A$  и  $\overline{A}$  точно едното множество има поне  $n+1$  елемента, а другото има най-много  $(2n+1) - (n+1) = n$  елемента. Ето защо множествата с поне  $n+1$  елемента са точно половината от всички, тоест  $(1/2) \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} = 4^n$ , което е точно дясната страна на тъждеството.



**Задача 13.** Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (n-1)^{n-k-1} = n^{n-1}.$$

**Доказателство:** Да разгледаме задачата: по колко начина можем да съставим редица от  $n - 1$  члена, всеки от които е цяло число от 1 до  $n$  включително? Това може да стане по  $n^{n-1}$  начина, защото има  $n$  възможни стойности за първия член,  $n$  възможни стойности за втория член и т.н. до  $(n - 1)$ -ия член вкл. От друга страна, числото  $n$  се среща  $k$  пъти в редицата,  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Местата, на които се среща, можем да изберем по  $\binom{n-1}{k}$  начина, а за всеки от останалите  $n - k - 1$  члена има  $n - 1$  възможни стойности, следователно общо  $(n - 1)^{n-k-1}$  възможности за всички тях и  $\binom{n-1}{k} (n - 1)^{n-k-1}$  редици за всяко  $k$ . Остава да сумираме по стойностите на  $k$ .

**Задача 14.** Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = F_{n+1},$$

където  $F$  означава число на Фибоначи:  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ .

**Доказателство:** По колко начина можем да се изкачим по стълба с  $n$  стъпала, ако на всяка крачка взимаме по едно или две стъпала? По  $F_{n+1}$  начина, защото с последната крачка взимаме едно или две стъпала, откъдето получаваме рекурентното уравнение  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ , а по стълби с едно и две стъпала можем да се изкачим съответно по  $F_2 = 1$  (един) начин и  $F_3 = 2$  (два) начина, тоест изпълнени са също така и началните условия на редицата на Фибоначи. (Формално по стълба с 0 стъпала можем да се изкачим по  $F_1 = 1$  (един) начин: като направим нула крачки, тоест нито една.) От друга страна, ако  $k$  е броят на крачките с дължина 2, то останалите  $n - 2k$  крачки имат дължина 1, тоест крачките са общо  $n - k$ , за всяко  $k$  можем само да изберем поредните номера на крачките с дължина 2, тоест избираме  $k$  числа от общо  $n - k$ , което може да се направи по  $\binom{n-k}{k}$  начина. Остава да сумираме по всички възможни стойности на  $k$ , така получаваме лявата страна на тъждеството.

**Задача 15.** Докажете с комбинаторни разсъждения тъждеството

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n},$$

където  $F$  означава число на Фибоначи:  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ .

**Доказателство:** Дясната страна на тъждеството брое по колко начина можем да се изкачим по стълба с  $2n - 1$  стъпала, ако на всяка крачка взимаме по едно или две стъпала. Следователно са нужни най-малко  $n$  и най-много  $2n - 1$  крачки и нека с първите  $n$  крачки сме взели общо  $2n - k$  стъпала,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ . Остават  $k - 1$  стъпала, по които можем да се изкачим по  $F_k$  начина, а измежду първите  $n$  крачки е имало  $n - k$  с дължина 2, чиито поредни номера можем да изберем по  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  начина. Следователно има  $\binom{n}{k} F_k$  възможности за всяко  $k$ . Остава да сумираме по стойностите на  $k$ .

**Задача 16.** За кои  $n$  биномните коефициенти  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots, \binom{n}{n}$  се редуват: нечетен, четен, нечетен, четен,  $\dots$ , нечетен?

**Решение:** От теоремата на Люка следва, че  $n = \underbrace{11111\dots 10}_{k \text{ пъти}}_{(2)} = 2^{k+1} - 2$ .

**Задача 17.** Да се намери остатъкът, който биномният коефициент  $\binom{2^{n+1}}{2^n}$  дава при деление на 4. (Числото  $n$  е цяло неотрицателно.)

**Решение:** Извършваме изваждането  $2^{n+1} - 2^n = 2^n$  в двоична бройна система:  
 $2^{n+1} = \underbrace{1000000\dots 0}_{n \text{ пъти}}_{(2)}, 2^n = \underbrace{1000000\dots 0}_{n \text{ пъти}}_{(2)}.$

$$\begin{array}{r} \bullet \\ 1000000\dots 0 \\ 100000\dots 0 \\ \hline 100000\dots 0 \end{array}$$

Един път взимаме назаем (съответният разряд е означен със запълнено кръгче). От теоремата на Кумер следва, че биномният коефициент се дели на  $2^1 = 2$ , но не и на  $2^2 = 4$ . Следователно той дава остатък 2 при деление на 4.

**Отговор:** Търсеният остатък е равен на 2.

**Задача 18.** По колко начина можем да оцветим стените на куб с  $k$  цвята (всяка стена в един цвят), ако смятаме за неразличими онези оцветявания, които се получават едно от друго чрез въртене на куба (като твърдо тяло)?

**Решение:** Като въртим куба, горната му стена може да бъде всяка от шестте. След като горната стена е избрана, долната е определена еднозначно, а именно нейната противоположна стена. Около отвесната ос през техните центрове можем да въртим куба на четири степени (по 90 градуса всяка). Следователно за всеки куб има  $6 \cdot 4 = 24$  начина на завъртане, тоест групата от пермутациите, действащи върху стените на куба, се състои от 24 пермутации:

- Една от тях (идентитетът) се състои от шест цикъла с дължина 1.
- Три пермутации имат четири цикъла: два с дължина 1 и два с дължина 2. Това са завъртанятията около една ос на 180 градуса.
- Шест пермутации се състоят от два цикъла с дължина 1 и един с дължина 4. Това са завъртанятията около една ос на 90 градуса.
- Шест пермутации се състоят от три цикъла с дължина 2 (а именно ротациите на 180 градуса около ос през средите на два срещуположни ръба).
- Осем пермутации се състоят от два цикъла с дължина 3 (а именно ротациите на 120 и на 240 градуса около ос през два срещуположни върха).

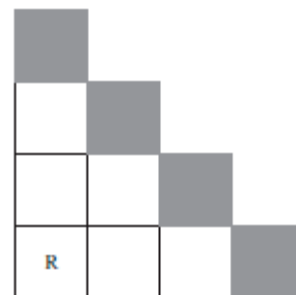
По лемата на Бърнсайд получаваме броя на оцветяванията на стените на куба с  $k$  цвята, като всяка стена на куба е едноцветна:  $(k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2) / 24$ . Степенните показатели са бройките цикли за всяка пермутация.

**Задача 19.** Намерете експоненциалната пораздаща функция  $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n$  на редицата  $(f(n))_{n=1}^{\infty}$  от задача 9.

**Решение:** От решението  $f(n) = (n-1)!$  на задача 9 следва, че

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z).$$

**Задача 20.** Робот тръгва от долния ляв ъгъл на триъгълна таблица с  $n$  реда и  $n$  стълба. На всяка стъпка се придвижва с една клетка надясно или нагоре. Движението престава, щом роботът стигне до диагонала (в сиво). Колко са възможните пътища? Отговорът да бъде функция на  $n$  в затворена форма.



**Решение:** За всяка стъпка на работа има две възможности: нагоре или надясно. Те се съчетават без ограничения за всички  $n-1$  стъпки, т.е. пътищата са  $2^{n-1}$ .