

Зад. 1 В тази задача и само в нея използваме фигурни скоби за означаване на ребрата на граф. Примерно, реброто с краища u и v се означава с “ $\{u, v\}$ ”, а **не** с “ (u, v) ”. Причината за това изключение е, че в тази задача разглеждаме наредени двойки, които се записват с кръгли скоби, примерно “ (i, j) ”, но не са ребра. За да не се бъркат ребрата с наредените двойки, ползваме фигурни скоби за ребрата.

За всеки $p, q \in \mathbb{N}^+$ дефинираме неориентирания граф $H_{p,q} = (V_{p,q}, E_{p,q})$, където

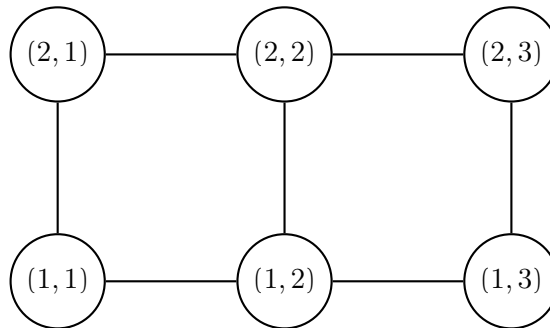
$$V_{p,q} = \{(i, j) : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$$
$$E_{p,q} = \{ \{(i_1, i_2), (j_1, j_2)\} : |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1 \}$$

- 2 т. • Нарисувайте $H_{2,3}$.
- 2 т. • Колко ребра има $H_{p,q}$?
- 16 т. • Докажете това по индукция.

Решение: В условието на тази задача е допусната грешка. Множеството от ребрата би трябвало да е

$$E_{p,q} = \{ \{(i_1, j_1), (i_2, j_2)\} : |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1 \} \quad (1)$$

Ако множеството от ребрата е дефинирано като в (1), то графът $H_{p,q}$ е известен под името “ $p \times q$ grid graph” или “ $p \times q$ lattice graph”. Върховете са всички наредени двойки (i, j) , където $1 \leq i \leq p$ и $1 \leq j \leq q$, а ребро има между две наредени двойки тук те се различават точно в едната позиция с единица. Ето как изглежда $H_{2,3}$:



Броят на ребрата на $H_{p,q}$ е

$$p(q-1) + q(p-1) = pq - p + pq - q = 2pq - p - q$$

Ще докажем това по индукция по p и q . Съгласно изучаваното на лекции, единият от начините да се направи доказателство по индукция при два аргумента е този.

- Базата е $p = 1, q = 1$. Графът $H_{1,1}$ е тривиален и няма ребра и, наистина, $2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 - 1 = 0$. ✓
- В индуктивното предположение допускаме, че за някои цели положителни p и q , броят на ребрата на $H_{p,q} = (V_{p,q}, E_{p,q})$ е $2pq - p - q$.

- Първо да разгледаме $H_{p+1,q} = (V_{p+1,q}, E_{p+1,q})$. Ще докажем, че $|E_{p+1,q}| = 2(p+1)q - (p+1) - q$. Очевидно $V_{p+1,q}$ се разбива на $V_{p,q}$ и множеството $X = \{(p+1, j) : 1 \leq j \leq q\}$, а $E_{p+1,q}$ се разбива на $E_{p,q}$ и множествата

$$Y = \{((p, j), (p+1, j)) : 1 \leq j \leq q\}$$

$$Z = \{((p+1, j), (p+1, j+1)) : 1 \leq j \leq q-1\}$$

Съгласно принципа на разбиването, $|E_{p+1,q}| = |E_{p,q}| + |Y| + |Z|$. От индуктивното предположение знаем, че $|E_{p,q}| = 2pq - p - q$. Очевидно $|Y| = q$ и $|Z| = q - 1$. Следователно,

$$|E_{p+1,q}| = 2pq - p - q + q + q - 1 = 2pq + 2q - (p+1) - q = 2(p+1)q - (p+1) - q$$

Кое и трябваше да докажем.

Сега разглеждаме $H_{p,q+1} = (V_{p,q+1}, E_{p,q+1})$. Ще докажем, че $|E_{p,q+1}| = 2p(q+1) - p - (q+1)$. Но това доказателство е напълно аналогично на вече направеното и подробното му писане е безмислено.

И така, в индуктивната стъпка, използвайки индуктивното предположение, доказахме, че твърдението е вярно за стойности на аргументите $(p+1, q)$ и $(p, q+1)$. □

Ако обаче множеството от ребрата е дефинирано като в условието, а именно

$$E_{p,q} = \{(i_1, i_2), (j_1, j_2)\} : |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1\} \quad (2)$$

то графът $H_{p,q}$ **не е** grid graph и решението е различно. Да кажем, че множеството от ребрата е дефинирано като в (2). Тогава ребро между две наредени двойки има тстк в едната от тях абсолютната стойност на разликата между елементите е 0 (тоест, наредена двойка от вида (i, i)), а в другата от тях абсолютната стойност на разликата между елементите е 1 (тоест, наредената двойка е от вида $(i, i+1)$ или $(i+1, i)$).

Картинно, графът е има следния вид. Да кажем, че $p = 8$ и $q = 5$. Върховете изглеждат така, ако са разположени по естествения за наредени двойки начин:

(1, 5) (2, 5) (3, 5) (4, 5) (5, 5) (6, 5) (7, 5) (8, 5)

(1, 4) (2, 4) (3, 4) (4, 4) (5, 4) (6, 4) (7, 4) (8, 4)

(1, 3) (2, 3) (3, 3) (4, 3) (5, 3) (6, 3) (7, 3) (8, 3)

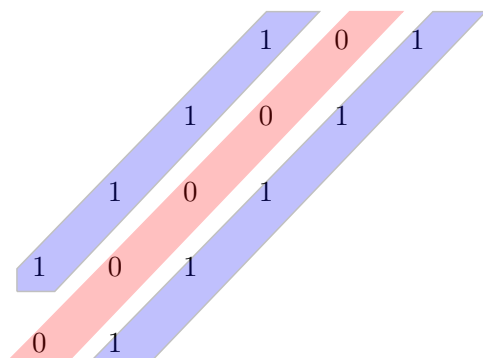
(1, 2) (2, 2) (3, 2) (4, 2) (5, 2) (6, 2) (7, 2) (8, 2)

(1, 1) (2, 1) (3, 1) (4, 1) (5, 1) (6, 1) (7, 1) (8, 1)

За това дали има ребро между два върха има значение само абсолютната стойност на разликата между елементите на едната двойка и абсолютната стойност на разликата между елементите на другата двойка. Ето как изглеждат абсолютните стойности на разликите:

4	3	2	1	0	1	2	3
3	2	1	0	1	2	3	4
2	1	0	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4	5	5
0	1	2	3	4	5	6	7

Ребро има между всяка нула и всяка единица. Останалите върхове—тези с абсолютна стойност на разликата, по-голяма от 1—са изолирани и можем да ги игнорираме:



Това, което остава след изтриването на върховете с абсолютна стойност на разликата, по-голяма от 1, е пълен двуделен граф. Единият дял са единиците, другият са нулите. Дяловете са акцентирани съответно със син и червен фон. Броят на ребрата е произведението от мощностите на дяловете.

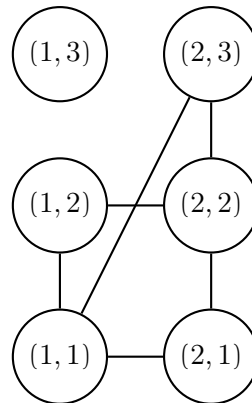
Дялът с нулите има мощност $\min\{p, q\}$. Дялът с единиците има следната мощност:

- ако $p = q$, то $2p - 2$, иначе казано, $2 \min\{p, q\} - 2$,
- в противен случай, $2 \min\{p, q\} - 1$.

В текущия пример $p = 8$, $q = 5$, така че $\min\{p, q\} = 5$ и наистина има 5 нули, а $2 \min\{p, q\} - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$ и наистина има 9 единици. Броят на ребрата е $5 \times 9 = 45$.

Този резултат може да се докаже за общия случай $p \times q$ по индукция, но това доказателство е по-тежаво от доказателството за броя на ребрата на grid graph-а. Всеки, който е намерил коректно броя на ребрата, дори без доказателство, ще има пълен брой точки на задачата. Всеки смислен опит за доказателство по индукция ще получи бонус до 20 точки.

А ето $H_{2,3}$, ако ребрата са дефинирани като в (2):



Зад. 2 Нека $G = (V, E)$ е Хамилтонов 3-регулярен граф. Докажете, че $\chi'(G) \leq 3$.

Решение: Първо забелязваме, че щом G е 3-регулярен, в сила е $\sum_{v \in V} d(v) = 3|V|$. Но знаем, че $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$. Тогава $3|V|$ е четно число. Заклучаваме, че $|V|$ е четно число.

Нека C е Хамилтонов цикъл в G . Щом G е Хамилтонов, такъв съществува. Дължината на C е $|V|$. Но тогава $|C|$ е четно число. Тогава можем да оцветим ребрата от C със само два цвята, да кажем червен и син, като цветовете алтернират върху C . Дотук няма инцидентни ребра в един и същи цвят.

Нека E' са ребрата на G , които не са в C . Такива трябва да има, инак G би бил 2-регулярен. Забелязваме, че никои две ребра от E' не са инцидентни: ако допуснем, че има $e_1, e_2 \in E'$, които са инцидентни, то нека общият им връх е u и тогава $d(u) \geq 4$, понеже u е инцидентен както с e_1 и e_2 , така и с точно две ребра на C . Но $d(u) = 3$, щом G е 3-регулярен. Полученото противоречие показва, че никои две ребра от E' не са инцидентни.

Щом никои две ребра от E' не са инцидентни, можем да оцветим ребрата от E' в трети цвят, да кажем зелен, и така получаваме оцветяване на ребрата на G в три цвята, такова че никои две инцидентни ребра не са в един и същи цвят. $\square$

Зад. 3 Нека $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Нека

$$S_1 = \{R \subseteq A \times A \mid R \text{ е рефлексивна} \}$$

$$S_2 = \{R \subseteq A \times A \mid R \text{ е симетрична} \}$$

$$S_3 = \{R \subseteq A \times A \mid R \text{ е транзитивна} \}$$

Нека

$$X = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

$$Y = \{R \in X \mid aRb \wedge cRd \wedge eRf\}$$

Намерете $|Y|$.

Решение: Множеството X се състои от релациите на еквивалентност над A . Множеството Y се състои от релациите на еквивалентност над A , в които a е в релация с b , c е в релация с d и e е в релация с f .

Както знаем от лекции, всяка релация на еквивалентност се дефинира от своите класове на еквивалентност, които представляват едно разбиване на опорното множество (в случая опорното множество е A). Следователно, $|Y|$ е равно на броя на разбиванията на A , такива че a и b са в един и същи дял на разбиването, c и d са в един и същи дял на разбиването и e и f са в един и същи дял на разбиването. Щом a и b са в един и същи дял, можем да мислим за тях като за “блокче” $\boxed{ab}$. Аналогично, можем да мислим за c и d като за блокче $\boxed{cd}$ и за e и f като за блокче $\boxed{ef}$. Можем да си представим множеството $A' = \{\boxed{ab}, \boxed{cd}, \boxed{ef}\}$. Тогава $|Y|$ е равно на броя на разбиванията на A' . Те са толкова малко, че можем да ги напишем на ръка:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\{ \boxed{ab} \right\}, \left\{ \boxed{cd} \right\}, \left\{ \boxed{ef} \right\} \right\} \\ & \left\{ \left\{ \boxed{ab}, \boxed{cd} \right\}, \left\{ \boxed{ef} \right\} \right\} \\ & \left\{ \left\{ \boxed{ab} \right\}, \left\{ \boxed{cd}, \boxed{ef} \right\} \right\} \\ & \left\{ \left\{ \boxed{ab}, \boxed{ef} \right\}, \left\{ \boxed{cd} \right\} \right\} \\ & \left\{ \left\{ \boxed{ab}, \boxed{cd}, \boxed{ef} \right\} \right\} \end{aligned}$$

И така, отговорът е $|Y| = 5$.

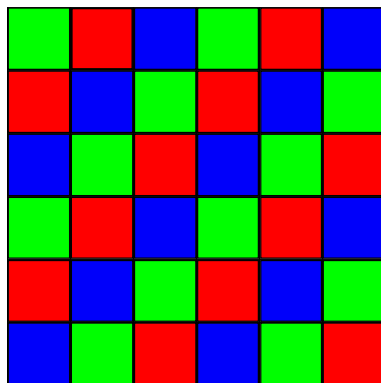
□

Зад. 4 Дадена е квадратна дъска с размери $n \times n$ сантиметра. Дъската е разчертана на еднакви квадратчета с размери 1×1 сантиметър. Всяко от тези квадратчета е оцветено в точно един от цветовете червен, син, зелен. Намерете най-малкото n , за което е вярно, че съществува поне един ред, в който има поне три квадратчета с един и същи цвят, и съществува поне една колона, в която има поне три квадратчета с един и същи цвят.

Решение: Търсеното число е 7. Първо ще покажем, че ако дъската е 7×7 , задължително съществуват ред и колона с желаното свойство. Наистина, $7 \times 7 = 49$, а $49 = 3 \times 16 + 1$. Съгласно обобщения принцип на Дирихле, върху дъската съществуват поне 17 квадратчета с един и същи цвят. БОО, нека този цвят е червен. Но $17 = 2 \times 7 + 3$ и редовете са 7, откъдето следва, пак по обобщения принцип на Дирихле, че съществува ред с поне 3 червени квадратчета. Напълно аналогично, съществува колона с поне 3 червени квадратчета.

Сега ще покажем, че, ако $n = 6$, то не е вярно, че непременно съществуват ред и колона с желаното свойство. Да си представим дъска 6×6 , в която, за $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ квадратче (i, j) е оцветено по това правило:

- ако $i + j \equiv 0 \pmod{3}$, то цветът е червен,
- ако $i + j \equiv 1 \pmod{3}$, то цветът е син,
- ако $i + j \equiv 2 \pmod{3}$, то цветът е зелен.



Очевидно всеки ред има само 2 квадратчета от един и същи цвят и всяка колона има само две квадратчета от един и същи цвят.

Ако $n \in \{1, \dots, 5\}$, пак не е вярно, че непременно съществуват ред и колона с желаното свойство. За доказателство може да се ползва дъска $n \times n$, която е поддъска на нарисуваната.

□

Зад. 5 Нека $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Колко наредени двойки (X, Y) има, такива че $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$ и $X \subseteq Y$?

Решение: Едно решение е да разгледаме всички възможни мощности на множеството Y . Очевидно $|Y| \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ако $|Y| = k$, то има $\binom{n}{k}$ начина да изберем Y . За всеки от тях, има точно 2^k начина да изберем X , понеже X е някакво подмножество на Y . Тогава броят на наредените двойки (X, Y) е

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 3^n$$

прилагайки теоремата на Нютон.

Друго възможно решение е да забележим, че от условието $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$ всеки елемент m на A има точно 4 възможни състояния:

1. m не принадлежи нито на X , нито на Y ,
2. m принадлежи на X , но не и на Y ,
3. m не принадлежи на X , но принадлежи на Y ,
4. m принадлежи и на X , и на Y .

Но от ограничението $X \subseteq Y$ следва, че второто състояние е невъзможно. Тогава за всеки елемент са възможни точно 3 състояния, и то независимо от състоянията на другите елементи. Оттук отговорът е директно 3^n .

□

Зад. 6 Нека $x_1, x_2, \dots, x_9$ са булеви променливи. Намерете полинома на Жегалкин на следната булева функция

$$((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3) \oplus ((x_4 \wedge x_5) \rightarrow x_6) \oplus ((x_7 \wedge x_8) \rightarrow x_9)$$

Решение:

$$\begin{aligned} & ((x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3) \oplus ((x_4 \wedge x_5) \rightarrow x_6) \oplus ((x_7 \wedge x_8) \rightarrow x_9) = \\ & (\overline{x_1 x_2} \vee x_3) \oplus (\overline{x_4 x_5} \vee x_6) \oplus (\overline{x_7 x_8} \vee x_9) = \\ & (\overline{\overline{x_1 x_2} \vee x_3}) \oplus (\overline{\overline{x_4 x_5} \vee x_6}) \oplus (\overline{\overline{x_7 x_8} \vee x_9}) = \\ & (\overline{\overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_3}}) \oplus (\overline{\overline{x_4 x_5} \wedge \overline{x_6}}) \oplus (\overline{\overline{x_7 x_8} \wedge \overline{x_9}}) = \\ & (\overline{x_1 x_2 \overline{x_3}}) \oplus (\overline{x_4 x_5 \overline{x_6}}) \oplus (\overline{x_7 x_8 \overline{x_9}}) = \\ & (\overline{x_1 x_2 (1 \oplus x_3)}) \oplus (\overline{x_4 x_5 (1 \oplus x_6)}) \oplus (\overline{x_7 x_8 (1 \oplus x_9)}) = \\ & (\overline{x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3}) \oplus (\overline{x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6}) \oplus (\overline{x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9}) = \\ & (1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3) \oplus (1 \oplus x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6) \oplus (1 \oplus x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9) = \\ & 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus 1 \oplus x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6 \oplus 1 \oplus x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9 = \\ & 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_4 x_5 \oplus x_4 x_5 x_6 \oplus x_7 x_8 \oplus x_7 x_8 x_9 = \\ & 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_4 x_5 \oplus x_7 x_8 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_4 x_5 x_6 \oplus x_7 x_8 x_9 \end{aligned}$$

Това е полиномът.

□