

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ПОПРАВИТЕЛНИЯ ИЗПИТ-ЗАДАЧИ ПО
ДИСКРЕТНИ СТР-РИ НА ИНФОРМАТИКА И КОМПЮТЪРНИ НАУКИ, 2 ПОТОК,
03 СЕПТЕМВРИ 2025

Зад. 1 Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Нека $S(m, n)$ е броят на сюрекциите от m -елементен домейн в n -елементен кодомейн. Докажете, че ако $m, n > 0$, то

$$S(m, n) = n(S(m-1, n-1) + S(m-1, n))$$

Не е необходимо да правите строго формално доказателство по индукция!

Решение: Искане се да докажем, че

$$S(m, n) = nS(m-1, n-1) + nS(m-1, n) \quad (1)$$

От лекции знаем, че

$$S(m, n) = n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \binom{n}{3}(n-3)^m + \dots + (-1)^{n-2} \binom{n}{n-2}(n-(n-2))^m + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}(n-(n-1))^m + \underbrace{(-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^m}_0 \quad (2)$$

Тогава

$$\begin{aligned} nS(m-1, n-1) &= n(n-1)^{m-1} - n \binom{n-1}{1}(n-2)^{m-1} + n \binom{n-1}{2}(n-3)^{m-1} - \dots \\ &\quad + n(-1)^{n-3} \binom{n-1}{n-3}(n-1-(n-3))^{m-1} - \\ &\quad + n(-1)^{n-2} \binom{n-1}{n-2}(n-1-(n-2))^{m-1} + \underbrace{n(-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1}(n-1-(n-1))^{m-1}}_0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} nS(m-1, n) &= n \cdot n^{m-1} - n \binom{n}{1}(n-1)^{m-1} + n \binom{n}{2}(n-2)^{m-1} - n \binom{n}{3}(n-3)^{m-1} - \dots \\ &\quad + n(-1)^{n-2} \binom{n}{n-2}(n-(n-2))^{m-1} \\ &\quad + n(-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}(n-(n-1))^{m-1} + \underbrace{n(-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^{m-1}}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

Ще съберем (3) и (4). Дясната страна на (3) има n събираеми, а дясната страна на (4) има $n+1$ събираеми. Ще групираме събираемите така: събираемостта $n \cdot n^{m-1} = n^m$ от (4) не се групира с нищо, а останалите събираеми се групират по двойки съгласно еднаквите множители $(n-k)^{m-1}$, където $k \in \{1, \dots, n\}$, както е показано с цветове. Игнорирайки нулите накрая (при $k = n$), получаваме

$$\begin{aligned} nS(m-1, n-1) + nS(m-1, n) &= n^m \\ &+ (-1)^1 \left(-n \binom{n}{0}(n-1)^{m-1} + n \binom{n}{1}(n-1)^{m-1} \right) \\ &+ (-1)^2 \left(-n \binom{n-1}{1}(n-2)^{m-1} + n \binom{n}{2}(n-2)^{m-1} \right) \\ &+ (-1)^3 \left(-n \binom{n-1}{2}(n-3)^{m-1} + n \binom{n}{3}(n-3)^{m-1} \right) \\ &+ \dots \\ &+ (-1)^{n-2} \left(-n \binom{n-1}{n-3}(n-1-(n-3))^{m-1} + n \binom{n}{n-2}(n-(n-2))^{m-1} \right) \\ &+ (-1)^{n-1} \left(-n \binom{n-1}{n-2}(n-1-(n-2))^{m-1} + n \binom{n}{n-1}(n-(n-1))^{m-1} \right) \end{aligned}$$

Накратко,

$$\begin{aligned} nS(m-1, n-1) + nS(m-1, n) &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(-n \binom{n-1}{k-1} (n-k)^{m-1} + n \binom{n}{k} (n-k)^{m-1} \right) \\ &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k n (n-k)^{m-1} \left(-\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \end{aligned}$$

Но $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, откъдето $-\binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}$. Тогава

$$\begin{aligned} n(S(m-1, n-1) + S(m-1, n)) &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k n (n-k)^{m-1} \binom{n-1}{k} \\ &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k n \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-1-k+1)}{k!} (n-k)^{m-1} \\ &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k)}{k!} (n-k)^{m-1} \\ &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} (n-k)^m \\ &= n^m + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \\ &= n^m + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \end{aligned} \tag{5}$$

Но дясната страна на (5) е точно равна на дясната страна на (2). Заклучаваме, че наистина

$$n(S(m-1, n-1) + S(m-1, n)) = S(m, n)$$

Кое и трябваше да покажем.

Тъждеството (1) може да се докаже по-кратко и с комбинаторни разсъждения, но това доказателство не е очевидно, за разлика от гореизложеното, което се прави автоматично, ако човек знае формулата за броя на сюрекциите.

Ето как може да се докаже с комбинаторни разсъждения. Разглеждаме множества X и Y , такива че $|X| = m$ и $|Y| = n$. Нека C е множеството от сюрекциите от X в Y . Фиксираме произволен $x \in X$. C се разбива на следните две множества по отношение на x .

- C_1 : множеството от сюрекциите, в които x е единственият елемент на X , чийто образ е $f(x)$.
- C_2 : множеството от сюрекциите, в които съществува поне още един елемент на X освен x , чийто образ е $f(x)$.

Първо забелязваме, че $|C_1| = nS(m-1, n-1)$. Ето защо. Нека $X' = X \setminus \{x\}$ и $Y' = Y \setminus \{f(x)\}$. За всяка **възможна стойност y на $f(x)$** , съществува очевидна биекция между подмножеството на C_1 , в което $y = f(x)$, и множеството от сюрекциите от X' в Y' . Последното има мощност $S(m-1, n-1)$. Има n различни начина за избор на y , понеже $|Y| = n$. Тогава $|C_1| = nS(m-1, n-1)$.

След това забелязваме, че $|C_2| = nS(m-1, n)$. Ето защо. За всяка **възможна стойност y на $f(x)$** , съществува очевидна биекция между подмножеството на C_2 , в което $y = f(x)$, и множеството от сюрекциите от X' в Y . Последното има мощност $S(m-1, n)$. Има n различни начина за избор на y , понеже $|Y| = n$. Тогава $|C_2| = nS(m-1, n)$.

Тъй като C се разбива на C_1 и C_2 , в сила е $|C| = nS(m-1, n-1) + nS(m-1, n)$. Но $|C| = S(m, n)$ по дефиниция. Тогава $S(m, n) = nS(m-1, n-1) + nS(m-1, n)$.

Зад. 2 Докажете, че за всяко $k \in \mathbb{N}^+$ съществува $(2k+1)$ -регулярен граф, който съдържа срязващо ребро (мост).

Решение: Ще направим конструктивно доказателство. Нека G' и G'' са два графа без общи върхове, като и двата са пълни двуделни графи $K_{2k,2k}$. Нека дяловете на G' са U' и W' , а дяловете на G'' са U'' и W'' . Очевидно до този момент от конструкцията всеки връх в G' и G'' има степен $2k$.

Нека x и y нови върхове, тоест, не са измежду върховете на G' или G'' . Добавяме x и y към конструкцията, като правим x съседен на и само на върховете от W' , а y съседен на и само на върховете от W'' . При това върховете от W' и W'' вече имат степени $2k+1$, върховете от U' и U'' остават със степени $2k$, а x и y също имат степени $2k$.

До този момент от конструкцията нито два върха от U' не са съседни и нито два върха от U'' не са съседни. Нека $U' = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k}\}$ и $U'' = \{b_1, b_2, \dots, b_{2k}\}$. Добавяме ребрата $(a_1, a_2), (a_3, a_4), \dots, (a_{2k-1}, a_{2k})$ и $(b_1, b_2), (b_3, b_4), \dots, (b_{2k-1}, b_{2k})$. Сега върховете от U' и U'' имат степени $2k+1$, върховете от W' и W'' остават със степени $2k+1$, а x и y остават със степени $2k$.

Накрая добавяме ребро e с краища x и y . Сега графът е $(2k+1)$ -регулярен и e е мост.

Зад. 3 Ако S е множество, то с $\Pi(S)$ ще означаваме множеството от всички разбивания на S . Ако H е граф, то предикатът $Q(H)$ има следния смисъл:

$$Q(H) \Leftrightarrow \exists \{X, Y\} \in \Pi(V(H)) \forall (u, v) \in E(H) : u \in X \wedge v \in Y$$

Нека G е обикновен граф. Нека M е матрицата на съседство на G . Докажете, че $Q(G)$ тогава и само тогава, когато за всяко нечетно k е вярно, че главният диагонал на M^k се състои само от нули.

Решение: Предикатът $Q(H)$ е истина тстк H е двуделен граф. Следователно, иска се да се докаже, че граф е двуделен тстк за всяко нечетно k е вярно, че главният диагонал на M^k се състои само от нули, където M е матрицата на съседство на H .

От лекции знаем теоремата, казваща, че за всеки ориентиран мултиграф H , ако A е матрицата на съседство на H и $V(H) = \{1, \dots, n\}$ и $r \in \mathbb{N}$, то $A^r[i, j]$ е равно на броя на не непременно простите ориентирани пътища в H от връх i до връх j с дължина r .

В частност, теоремата остава в сила, ако H е ориентиран граф без примки, който не е мултиграф, и освен това матрицата на съседство е симетрична. Но ако това е така, то матрицата A е матрица на съседство и на съответния обикновен граф H' . Съответният на H неориентиран граф се дефинира така: $V(H') = V(H)$, а всяка двойка ориентирани ребра (i, j) и (j, i) в H отговаря биективно на едно неориентираното ребро (i, j) в H' . Очевидно, всеки ориентиран, не непременно прост път в H с дължина r от i до j отговаря биективно на един неориентиран, не непременно прост път в H' с дължина r от i до j .

Следователно, $M^k[i, j]$ е броят на **неориентираните** пътища в G с дължина k от i до j . Оттук следва, че $M^k[i, i]$ е броят на пътищата в G с дължина k от i до i ; с други думи, броят на циклите, съдържащи връх i . Но $M^k[i, i]$, за $i \in \{1, \dots, |V(G)|\}$, са точно елементите на главния диагонал на M^k . Тогава твърдението, което трябва да докажем, звучи така: докажете, че G е двуделен тогава и само тогава, когато за всеки връх i на G е вярно, че броят на циклите с нечетна дължина, съдържащи връх i , е нула. По-просто казано, G е двуделен тогава и само тогава, когато G няма цикли с нечетна дължина. Но това е резултат, който сме доказали на лекции.

Зад. 4 Да разгледаме безкрайната редица $(T_0, T_1, T_2, \dots)$, дефинирана така

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n \in \{0, 1, 2\} \\ \frac{1 + T_{n-1}T_{n-2}}{T_{n-3}}, & \text{ако } n \geq 3 \end{cases}$$

Докажете по индукция, че

$$\forall n \geq 2 : T_{n+2} + T_{n-2} = 4T_n$$

Решение: Исканото е да се докаже, че

$$\forall n \geq 2 : T_{n+2} = 4T_n - T_{n-2} \quad (6)$$

Да изчислим T_3 и T_4 :

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1 + T_{3-1}T_{3-2}}{T_{3-3}} = \frac{1 + T_2T_1}{T_0} = \frac{1 + 1 \times 1}{1} = 2 \\ T_4 &= \frac{1 + T_{4-1}T_{4-2}}{T_{4-3}} = \frac{1 + T_3T_2}{T_1} = \frac{1 + 2 \times 1}{1} = 3 \end{aligned}$$

База: Базовият случай е $n = 2$. Дясната страна на (6) става $T_{2+2} = 4T_2 - T_{2-2}$, тоест $T_4 = 4T_2 - T_0$, тоест $3 = 4 - 1$, което е очевидно вярно. Доказахме базовия случай.

Индуктивно предположение: Допускаме, че за някое $n \geq 2$ е изпълнено $T_{n+2} = 4T_n - T_{n-2}$.

Индуктивна стъпка: Ще докажем, че $T_{(n+1)+2} = 4T_{n+1} - T_{(n+1)-2}$, тоест, че

$$T_{n+3} = 4T_{n+1} - T_{n-1} \quad (7)$$

По дефиниция,

$$T_{n+3} = \frac{1 + T_{n+2}T_{n+1}}{T_n} = \frac{1}{T_n}(1 + T_{n+2}T_{n+1}) \quad (8)$$

Разглеждаме $1 + T_{n+2}T_{n+1}$. От индуктивното предположение знаем, че $T_{n+2} = 4T_n - T_{n-2}$. Тогава

$$1 + T_{n+2}T_{n+1} = 1 + (4T_n - T_{n-2})T_{n+1} = 4T_nT_{n+1} - (T_{n-2}T_{n+1} - 1) \quad (9)$$

По дефиниция,

$$T_{n+1} = \frac{1 + T_nT_{n-1}}{T_{n-2}}$$

откъдето

$$T_{n-2}T_{n+1} = 1 + T_nT_{n-1} \quad (10)$$

Заместваме в (9) и получаваме

$$1 + T_{n+2}T_{n+1} = 4T_nT_{n+1} - (1 + T_nT_{n-1} - 1) = 4T_nT_{n+1} - T_nT_{n-1} = T_n(4T_{n+1} - T_{n-1})$$

Заместваме в (8) и получаваме

$$T_{n+3} = \frac{1}{T_n}(T_n(4T_{n+1} - T_{n-1})) = 4T_{n+1} - T_{n-1}$$

Но това е точно (7), което трябваше да покажем.