

Дискретни структури, лекция 1: Въведение в съждителната логика

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

15 август 2025 г.

Съждителна логика. Прости съждения.

Логиката е науката за правене на валидни изводи и правилни разсъждения.

Съждителната логика е базовият и най-стар дял на логиката, датиращ поне от Аристотел (384-322 пр. Хр.). Съждителната логика (Propositional Logic) изучава свързването на съждения чрез логически съюзи в по-сложни съждения.

Просто съждение е просто разказвателно изречение като “Днес е понеделник” или “Две и две е четири”. В съждителната логика нещата са черно-бели: всяко просто съждение е или истина, или лъжа. Друга възможност няма. И дума не може да става за частична истинност.

“Колко е часът?”, “Стани!” и “Две и две” не са съждения.

Съставни съждения. Логически съюзи.

Съставно съждение се получава чрез свързване с *логически съюзи* на прости съждения, други съставни съждения или логически константи.

Логическите съюзи са тези:

- конюнкция (AND)
- дизюнкция (OR)
- изключващо или (XOR)
- импликация
- би-импликация
- отрицание

Логическите константи са Т (истина) и F (лъжа). Допустимо е, макар да не е желателно, да се записват съответно с 1 и 0.

Конюнкция: $p \wedge q$

Дефиниция

Конюнкцията отговаря доста точно на съюза и от естествения език. Нека p и q са прости съждения. " $p \wedge q$ " е конюнкцията на p и q . Чете се " p и q ".

Ето словесната дефиниция: $p \wedge q$ е истина тстк[†] и p е истина, и q е истина.

Алтернативна дефиниция е следната таблица (на истинност).

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

[†]"тстк" е кратък запис на "тогава и само тогава, когато"

Конюнкция: $p \wedge q$

Комутативност. Алтернативни аналози в естествения език.

Конюнкцията е *комутативна*: “ $p \wedge q$ ” има абсолютно същия смисъл като “ $q \wedge p$ ”.

В естествения език не винаги е така! “*Той забогатя и отвори ресторант.*” има различен смисъл от “*Той отвори ресторант и забогатя.*”. Житейското **и** може да има темпорален аспект или причинно-следствен аспект, каквито при логическия съюз няма.

Съюзите но, а, обаче, хем . . . , хем . . . и други от естествения език също изразяват конюнкция, но с нюанси, каквито в логиката няма.

Дизюнкция: $p \vee q$

Въведение

Дизюнкцията отговаря, горе-долу, на съюза или от естествения език. Съответствието е само донякъде! В естествения език сякаш по-често “ p или q ” е истина тстк точно едното от p и q е истина. Примерно, ако някой пита “*Какъв беше отговорът на втора задача от домашното?*” и чуе “*Не помня точно. Беше 7 или беше 9.*”, то е ясно, че отговорът не е бил хем 7, хем 9. Такова **или** се нарича **изключващо или**, понеже изключва възможността и двете съждения, които свързва, да са истина. Ще разгледаме изключващото или нататък.

Дизюнкцията в логиката е **включващо или**. Нека p и q са прости съждения. “ $p \vee q$ ” е дизюнкцията на p и q . Чете се “ p или q ”.

Дизюнкция: $p \vee q$

Дефиниция

Ето словесната дефиниция: $p \vee q$ е истина тстк поне едното от p и q е истина.

Алтернативна дефиниция е следната таблица на истинност.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Дизюнкцията е комутативна: " $p \vee q$ " има абсолютно същия смисъл като " $q \vee p$ ".

Изключващо или: $p \oplus q$

Нека p и q са прости съждения. “ $p \oplus q$ ” е **изключващото или** на p и q . Чете се “или p , или q ”. $p \oplus q$ е истина тстк точно едното от p и q е истина.

Алтернативна дефиниция е следната таблица на истинност.

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Изключващото или е комутативно: “ $p \oplus q$ ” има абсолютно същия смисъл като “ $q \oplus p$ ”.

Импликация: $p \rightarrow q$

Въведение

Импликацията съответства, но само донякъде, на съюза **ако** от естествения език. В естествения език обаче, използването на този съюз по правило предполага наличие на някаква причинно-следствена връзка. Примерно, “Ако спре токът, ще останем на тъмно.” казва, че спирането на тока е причина да останем на тъмно. В логиката, която разглеждаме, за причини и следствия не може да става дума.

Нека p и q са прости съждения. “ $p \rightarrow q$ ” се чете “ p импликация q ”. Не е добра идея да се казва “импликацията на p и q ”, понеже импликацията не е комутативна (както ще видим). Тъй като не е комутативна, p и q участват по различен начин в $p \rightarrow q$; p се нарича *антецедент*, а q се нарича *консеквент*.

Импликация: $p \rightarrow q$

Дефиниция (1)

Ще изведем таблицата на истинност на импликацията. Мислим за импликацията $p \rightarrow q$ като за обещание: **ако** p е истина, **то** q трябва да е истина; в противен случай обещанието не е изпълнено. От тези съображения извеждаме долните два реда на таблицата на истинност, в които антецедентът е истина:

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	?
F	T	?
T	F	F
T	T	T

Импликация: $p \rightarrow q$

Дефиниция (2)

Как да додефинираме импликацията в случай, че антецедентът е лъжа? Възприемаме оптимистичния възглед, че обещанието е спазено винаги когато антецедентът е лъжа, независимо от това дали консеквентът е лъжа или истина.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Това е единственият смислен начин да се дефинира импликацията, но той води до контраинтуитивни заключения. Съгласно тази таблица, съждението “Ако $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, то Земята е по-голяма от Слънцето.” е истина, въпреки че антецедентът е лъжа и консеквентът е лъжа.

Различни езикови формулировки на импликацията

$p \rightarrow q$ е формалният запис на всяко от следните изречения.

- Ако p , то q .
- Ако p , q .
- Когато p , q .
- Тогава, когато p , q .
- p влече q .
- p , само ако q .
- p , само когато q .
- p само тогава, когато q .
- q , ако p .
- q , когато p .
- q тогава, когато p .
- Достатъчно е p за q .
- Необходимо е q за p .
- q следва от p .

Некомутативност на импликацията

Импликацията не е комутативна, тоест, $p \rightarrow q$ не е същото като $q \rightarrow p$. Това е интуитивно ясно, но ето доказателство с таблици на истинност.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	T
T	T	T	T

Казваме, че $q \rightarrow p$ е *конверсната импликация* на $p \rightarrow q$.
Аналогично, $p \rightarrow q$ е конверсната импликация на $q \rightarrow p$.

Би-импликация: $p \leftrightarrow q$

Ако p и q са прости съждения, то $p \leftrightarrow q$ е би-импликацията на p и q . Това се чете “ p тогава и само тогава, когато q ”.

Би-импликацията е истина тстк p и q имат една и съща логическа стойност. Таблицата на този съюз е следната:

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Би-импликацията е комутативна.

Отрицание: $\neg p$

Нарича се още *негация* и отговаря на частицата не от естествения език. Ако p е просто съждение, то неговото отрицание се бележи с " $\neg p$ " и се чете "*не p* ".

Отрицанието не е съюз в същия смисъл, в който са съюзи конюнкцията, дизюнкцията и т. н., които съюзи свързват две съждения. За разлика от тях, отрицанието се прилага към едно съждение. Забележете, че в естествения език, аналогът на негацията не е съюз, а частица.

Отрицанието на p е лъжа, когато p е истина, и е истина, когато p е лъжа. Таблицата на истинност има само два реда, понеже съждението е само едно.

p	$\neg p$
F	T
T	F

Лог. съюзи върху константи или съставни съждения

Върху константи

Дотук разгледахме само свързването на прости съждения, наречени p и q , чрез логически съюзи в съставни съждения като " $p \wedge q$ ".

А ако p или q не е просто съждение? Ако, примерно, p е константа, какво означава " $p \wedge q$ "? Тогава таблицата на $p \wedge q$ има само два реда, понеже за съдържанието на p , тоест, за семантиката на p , има само една възможност. Таблицата на истинност е едната от тези две таблици, в зависимост от това дали p е лъжа или истина.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F

p	q	$p \wedge q$
T	F	F
T	T	T

Лог. съюзи върху константи или съставни съждения

Върху съставни съждения (1)

Какво означава “ $p \wedge q$ ”, ако p е съставно съждение? Ако **не разглеждаме структурата** на p , тоест, ако третираме p като просто (атомарно) съждение, таблицата на истинност пак е таблицата на конюнкцията.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Лог. съюзи върху константи или съставни съждения

Върху съставни съждения (2)

Сега ще разгледаме p като “истинско” съставно съждение със своята структура. Да кажем, че p е съждението $s \vee t$, където s и t са прости съждения. Тогава $p \wedge q$ всъщност е $(s \vee t) \wedge q$. Това е съставно съждение върху три прости съждения и таблицата има $2^3 = 8$ реда. Ето таблицата с подробно извеждане.

s	t	q	$s \vee t$	$(s \vee t) \wedge q$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	F
T	F	T	T	T
T	T	F	T	F
T	T	T	T	T

Лог. съюзи върху константи или съставни съждения

Върху съставни съждения (3)

Ако обаче p е съждението $s \vee q$, то $p \wedge q$ е $(s \vee q) \wedge q$, което е над две прости съждения и таблицата има само $2^2 = 4$ реда.

s	q	$s \vee q$	$(s \vee q) \wedge q$
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	F
T	T	T	T

С езика на теорията на множествата: ако p и q са съждения, чиито множества от прости съждения са съответно A и B , то за всяко от съжденията $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \oplus q$, $p \rightarrow q$ и $p \leftrightarrow q$, множеството от простите съждения е $A \cup B$.

За съставните съждения в общия случай

Въведение

Всяко съставно съждение е от вида $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \oplus q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ или $\neg p$, където всяко от p , q е или просто съждение, или логическа константа, или съставно съждение.

При записването на съставни съждения използваме метасимволите лява скоба “(” и дясна скоба “)”, за да избегнем двусмислие.

Във формалните правила за конструиране на съставни съждения ще слагаме по един чифт скоби винаги, когато ползваме логически съюз. Досега не правехме така за по-четимо изложение, но формалните правила за конструиране се описват по-лесно, ако се слага чифт скоби за всеки логически съюз.

За съставните съждения в общия случай

Синтаксисът

Нека са дадени простите съждения $p_1, p_2, \dots, p_n$. Въвеждаме азбуката

$$\Sigma = \{F, T, p_1, p_2, \dots, p_n, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)\}$$

Формулите над $p_1, p_2, \dots, p_n$ са точно стринговете, които се получават по следните правила.

- F и T са формули.
- p_1 е формула, p_2 е формула, $\dots$, p_n е формула.
- Ако s и t са формули, то всяко от $\neg(s)$, $(s \wedge t)$, $(s \vee t)$, $(s \oplus t)$, $(s \rightarrow t)$ и $(s \leftrightarrow t)$ е формула.

За съставните съждения в общия случай

Семантиката

Семантиката на F е лъжа. Семантиката на T е истина. За всяко $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, семантиката на формулата p_i е простото съждение $p_i^\dagger$. Ако s и t са съждения, то семантиката на всяко от $\neg(s)$, $(s \wedge t)$, $(s \vee t)$, $(s \oplus t)$, $(s \rightarrow t)$ и $(s \leftrightarrow t)$ се получава от семантиките на s и t чрез правилата на съответните логически съюзи.

[‡]Ако сме много прецизни, различаваме съждението p_i от буквата p_i , с която го записваме! Това са принципно различни обекти!

За съставните съждения в общия случай

Примери (1)

Нека p , q и r са прости съждения. Ето примери за формули над тях съгласно правилата за синтаксиса, които видяхме преди малко.

F

p

r

$\neg(q)$

$(p \wedge p)$

$(p \wedge r)$

$\neg((p \wedge r))$

$((p \oplus r) \rightarrow (q \wedge \neg(p)))$

$\neg(((p \oplus r) \rightarrow (q \wedge \neg(p))))$

За съставните съждения в общия случай

Примери (2)

А ето и примери за стрингове, които не са формули съгласно гореизложените синтактични правила.

FT

pq

(p)

$p \wedge q$

$\neg p$

$\neg p \wedge q$

$(p \rightarrow q \vee r)$

Нито един от тези стрингове не може да бъде генериран от гореизложените синтактични правила.

Приоритети на логическите съюзи

Гореизложените синтактични правила конструират формули, които са трудни за четене от човек заради трупането на чифтове скоби. Примерно,

$$((((\neg(p) \wedge \neg(q)) \vee r) \rightarrow (p \vee r)) \leftrightarrow (\neg(r) \rightarrow p))$$

е неприятен за четене израз, макар да е валидна формула.

Ще се уговорим, че следните приоритети на логическите съюзи са в сила, в намаляващ порядък:

- ❶ отрицание,
- ❷ конюнкция,
- ❸ дизюнкция,
- ❹ импликация,
- ❺ би-импликация.

Ако съблюдаваме тези приоритети, същият израз може да се запише като

$$\neg p \wedge \neg q \vee r \rightarrow p \vee r \leftrightarrow \neg r \rightarrow p$$

Валюация на прости съждения.

Нека са дадени някакви прости съждения. *Валюация* на тези прости съждения е раздаване на конкретни логически стойности—лъжа или истина—на тях. Преди това раздаване, простите съждения са логически променливи и всяко може да е или лъжа, или истина. След раздаването, всяко от простите съждения има конкретна стойност и вече не е променлива.

Формално, валюация е всяка функция от множеството на простите съждения в множеството $\{F, T\}$.

Примерно, нека разглеждаме простите съждения p и q . Нека v е валюацията, даваща T на p и F на q . Пишем $v(p) = T$ и $v(q) = F$.

Стойност на съждение по отношение на валюация.

Дефиниция (1)

Нека R е съставно съждение, чиито прости съждения са $p_1, \dots, p_n$. Нека v е валюация на тези прости съждения.

Стойността на R по отношение на v , която означаваме с " $TV(R, v)$ ", се изчислява така:

- ① ако R е F , то $TV(R, v) = F$; ако R е T , то $TV(R, v) = T$,
- ② ако R е p_i , за някое $i \in \{1, \dots, n\}$, то $TV(R, v) = v(p_i)$,
- ③ ако R е от вида $\neg(A)$ за някое съждение A , то
 - ако $TV(A, v) = T$, то $TV(R, v) = F$,
 - ако $TV(A, v) = F$, то $TV(R, v) = T$,

Стойност на съждение по отношение на валуация.

Дефиниция (2)

- 4 ако R е от вида $(A \wedge B)$ за някои съждения A и B , то $TV(R, v) = T$ тстк $TV(A, v) = T$ и $TV(B, v) = T$,
- 5 ако R е от вида $(A \vee B)$ за някои съждения A и B , то $TV(R, v) = T$ тстк $TV(A, v) = T$ или $TV(B, v) = T$,
- 6 ако R е от вида $(A \oplus B)$ за някои съждения A и B , то $TV(R, v) = T$ тстк или $TV(A, v) = T$, или $TV(B, v) = T$,
- 7 ако R е от вида $(A \rightarrow B)$ за някои съждения A и B , то $TV(R, v) = T$ тстк $TV(A, v) = F$ или $(TV(A, v) = T$ и $TV(B, v) = T)$,
- 8 ако R е от вида $(A \leftrightarrow B)$ за някои съждения A и B , то $TV(R, v) = T$ тстк $TV(A, v) = TV(B, v)$.

Стойност на съждение по отношение на валюация.

Пример за изчислението на $TV(R, v)$

Нека $R = ((p \rightarrow t) \vee (q \rightarrow s))$. Нека v е тази валюация:
 $v(p) = F$, $v(t) = T$, $v(q) = T$ и $v(s) = T$.

Да изчислим $TV(R, v)$. R е от вида $(A \vee B)$, така че ще приложим правило 5, но само след като изчислим $TV(A, v)$ и $TV(B, v)$.

A е от вида $(A' \rightarrow B')$, така че прилагаме правило 7, съгласно което $TV(A, v) = T$, понеже антецедентът A' всъщност е p , а $v(p) = F$.

B е от вида $(A'' \rightarrow B'')$, така че прилагаме правило 7, съгласно което $TV(B, v) = T$, понеже антецедентът A'' всъщност е q , а $v(q) = T$, и консеквентът B'' всъщност е s , а $v(s) = T$.

Вече знаем, че $TV(A, v) = T$ и $TV(B, v) = T$. Съгласно правило 5, $TV(R, v) = T$.

Тавтология, противоречие, условност.

Дефиниция

- Съждение, чиято стойност е T за всяка валюация на простите му съждения, се нарича *тавтология*.
- Съждение, чиято стойност е F за всяка валюация на простите му съждения, се нарича *противоречие*.
- Съждение, чиято стойност е T за поне една валюация на простите му съждения и F за поне една валюация на простите му съждения, се нарича *условност*. Лесно се вижда, че съставно съждение е условност тогава и само тогава, когато не е нито тавтология, нито противоречие.

Тавтология, противоречие, условност.

Примери

Нека p е просто съждение.

Пример за тавтология е $p \vee \neg p$. Или дори само Т.

Пример за противоречие е $p \wedge \neg p$. Или дори само F.

Пример за условност е p .

Еквивалентност на съждения.

Дефиниция

Нека A и B са съждения. A и B са *еквивалентни* тстк съставното съждение $A \leftrightarrow B$ е тавтология. Фактът, че A и B са еквивалентни, се бележи с “ $A \equiv B$ ”.

Внимание! Буквата “ $\equiv$ ” **не е логически съюз**, така че “ $A \equiv B$ ” не е съставно съждение на A и B .

Прост пример за еквивалентни съждения е $A = p \wedge q$ и $B = q \wedge p$.

Следната дефиниция

Две съждения са еквивалентни тстк имат еднакви колони в таблицата на истинност.

е неудачна. Както предстои да видим, съжденията p и $p \vee (p \wedge q)$ са еквивалентни, но таблицата на p има два реда, а таблицата на $p \vee (p \wedge q)$ има четири реда.

Еквивалентност на съждения.

Примери

Ще покажем, че $(p \rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$p \wedge q$	$(p \rightarrow q) \wedge p \leftrightarrow p \wedge q$
F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T

Ще покажем, че $p \rightarrow q \equiv \underbrace{\neg q \rightarrow \neg p}_{\text{контрапозитивното}}$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	T	T

Често ползвани еквивалентности (закони).

св-ва на константите: $p \wedge T \equiv p$, $p \vee F \equiv p$, $p \vee T \equiv T$, $p \wedge F \equiv F$.

свойства на отрицанието: $p \wedge \neg p \equiv F$, $p \vee \neg p \equiv T$.

идемпотентност: $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$.

закон за двойното отрицание: $\neg(\neg p) \equiv p$.

комутативност: $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

асоциативност: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$,
 $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$.

дистрибутивност: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,
 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

закони на De Morgan: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$,
 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

закони за поглъщането: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.

свойство на импликацията: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$.

свойство на би-импликацията: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Как се доказва еквивалентност на съждения.

Първи начин: с таблица

Предимства на табличния метод:

- той е алгоритмичен, така че не изисква въображение и досетливост и може да се програмира лесно,
- ако съжденията, върху които го прилагаме, всъщност не са еквивалентни, това ще стане ясно; иначе казано, доказването на еквивалентост и опровергаването на еквивалентост изискват едно и също усилие.

Но табличният метод има и сериозен недостатък. Ако простите съждения са много, таблицата е огромна. При n прости съждения, таблицата има 2^n реда.

Табличният метод е семантичен.

Как се доказва еквивалентност на съждения.

Втори начин: с еквивалентни преобразувания

За да можем да прилагаме този метод, трябва да разполагаме с непразно множество от закони за еквивалентност, които са дадени предварително и не се доказват. За целите на нашия курс, тези закони–аксиоми са законите от Слайд 34.

Нека A и B са някакви съждения. Доказателството с еквивалентни преобразувания, че $A \equiv B$, става по тази схема. Започваме с едно от съжденията, да кажем A . Прилагаме някое еквивалентно преобразувание, което или от аксиомите, или вече е доказано с преобразувания[§], и получаваме съждение A' . Аналогично, от A' получаваме съждение A'' , и така нататък, докато в крайна сметка получим съждението B .

[§] A не таблично! Това е ключово! Ако ползваме таблица поне веднъж, доказателството не е с преобразувания.

Пример за д-во на еквивалентност с преобразувания.

Ще докажем, че $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \equiv \top$.

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \equiv \text{(свойство на импликацията)}$$

$$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r) \equiv \text{(асоциативност на дизюнкцията)}$$

$$\neg p \vee (q \vee (\neg q \vee r)) \equiv \text{(асоциативност на дизюнкцията)}$$

$$\neg p \vee ((q \vee \neg q) \vee r) \equiv \text{(свойства на отрицанието)}$$

$$\neg p \vee (\top \vee r) \equiv \text{(свойства на константите)}$$

$$\neg p \vee \top \equiv \text{(свойства на константите)}$$

$\top$

Друг пример за д-во на екв. с преобразувания.

Неуспешен опит за доказателство

Иска се да докажем, че $p \equiv p \vee (p \wedge q)$. С учебна цел, първо ще направим неуспешен опит за доказателство.

$$p \vee (p \wedge q) \equiv \quad (\text{дистрибутивност})$$

$$(p \vee p) \wedge (p \vee q) \equiv \quad (\text{идемпотентност})$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv \quad (\text{дистрибутивност})$$

$$(p \wedge p) \vee (p \wedge q) \equiv \quad (\text{идемпотентност})$$

$$p \vee (p \wedge q)$$

Нищо не постигнахме. Получихме това, от което започнахме. По този начин може да се “въртим в кръг” произволен брой пъти, без да постигнем доказателство.

Друг пример за д-во на екв. с преобразувания.

Успешен опит за доказателство

$$p \vee (p \wedge q) \equiv \text{(свойсва на константите)}$$

$$(p \wedge \top) \vee (p \wedge q) \equiv \text{(дистрибутивн. на конюнкт. спрямо дизюнкт.)}$$

$$p \wedge (\top \vee q) \equiv \text{(свойства на константите)}$$

$$p \wedge \top \equiv \text{(свойсва на константите)}$$

p // **успех!**

Как да се досети човек да започне, заменяйки p с еквивалентното му $p \vee \top$? За съжаление, рецепта за общия случай няма. Доказателствата чрез преобразувания изискват добра интуиция.

Предимства на метода с преобразуванията

Методът с преобразуванията е синтактичен. Основно негово предимство е, че **в някои случаи** доказателството е много лесно дори при голям брой прости съждения. Примерно, трябва да докажем

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \vee (((\neg a \rightarrow s) \oplus (t \rightarrow \neg u)) \leftrightarrow (w \rightarrow z)) \equiv T$$

Има 9 прости съждения, така че таблицата би била с $2^9 = 512$ реда. Но доказателството с еквивалентни преобразувания е съвсем лесно, ако съобразим, че $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r) \equiv T$, което вече доказахме на Слайд 37. Предвид това, имаме право да запишем дадения израз като

$$T \vee (((\neg a \rightarrow s) \oplus (t \rightarrow \neg u)) \leftrightarrow (w \rightarrow z)) \equiv T$$

което без съмнение е вярно, понеже $T \vee A \equiv T$ за произволно съждение A , съгласно свойствата на константата T .

Недостатъци на метода с преобразуванията

Основните недостатъци на метода с преобразуванията са тези.

- Той не е алгоритмичен, а иска досетливост. Ако се досетим за правилна, разумно дълга редица от преобразувания, добре, печелим. Ако ли не, губим.
- Доказването на еквивалентност и опровергаването на еквивалентност са съвършено различни неща.

КРАЙ