

Дискретни структури, лекция 1: Въведение в предикатната логика

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

29 септември 2025 г.

Едноместен предикат е изречение, в което има “празно място”. В това празно място може да се сложи обект от някаква предварително зададена област, наречена *домейн*. За всеки обект от домейна, ако запълним празното място с този обект, предикатът се превръща в съждение, което е или истина, или лъжа.

Нека домейнът се състои от плодовете банан, портокал, авокадо, ягода. Да разгледаме предиката

..... е червен[†]

над този домейн. Сам по себе си, предикатът не е нито истина, нито лъжа, така че не е съждение. Ето как запълването на празното място с обект от домейна прави съждение.

банан е червен // лъжа

портокал е червен // лъжа

авокадо е червено // лъжа

ягода е червена // истина

[†]Родовете нямат значение.

Как записваме предикатите.

Наместо да слагаме точки или подчертавка на празното място в изречението, удобно е да използваме променлива, примерно x . Тогава предикатът "... е червен" става " x е червен", където домейнът на x е множеството от плодовете. Да бележим този предикат с " $P(x)$ ". Тогава

- $P(\text{ягода})$ е истина, докато
- $P(\text{банан})$ е лъжа и $P(\text{портокал})$ е лъжа и $P(\text{авокадо})$ е лъжа.

Отново: предикатът $P(x)$ сам по себе си не е нито истина, нито лъжа. Истина или лъжа се получава само след заместване на x с обект от домейна. Заместването на x с обект от домейна дава съждение.

Особен интерес представляват тези два случая.

- Има поне един елемент на домейна, за който предикатът е истина. Това бележим със “ $\exists xP(x)$ ” или “ $\exists x : P(x)$ ” или “ $\exists x (P(x))$ ”.
- За всеки елемент на домейна, предикатът е истина. Това бележим със “ $\forall xP(x)$ ” или “ $\forall x : P(x)$ ” или “ $\forall x (P(x))$ ”.

Символите “ $\exists$ ” и “ $\forall$ ” се наричат *квантори*. $\exists$ е *екзистенциалният квантор*, а $\forall$ е *универсалният квантор*. Да кажем, че елементите на домейна са $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогава

- $\exists xP(x)$ е кратък запис за “ $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$ ”, а
- $\forall xP(x)$ е кратък запис за “ $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$ ”.

Виждаме, че екзистенциалният квантор е свързан с дизюнкцията, а универсалният, с конюнкцията.

Свързани и свободни променливи.

Свързана променлива е променлива, върху която е приложен квантор. Променлива, която не е свързана, е *свободна*.

Като пример, в израза $\forall x P(x)$, променливата x е свързана, докато в израза $P(x)$, променливата x е свободна.

Израз със свързана променлива е съждение. " $\forall x P(x)$ " е съждение, защото или е вярно, че за всеки елемент на домейна предикатът от него е истина, или това не е вярно, в зависимост от това какъв е домейнът и какъв е предикатът.

Израз със свободна променлива не е съждение по очевидни причини.

Съставни предикати.

Особен интерес за нас представляват съставните предикати, които се получават от елементарни предикати (прости изречения с “дупки”), чрез свързване с логически съюзи. Примерно, ако домейнът са реалните функции и $P(x)$ е предикатът “ x е непрекъсната”, а $Q(x)$ е предикатът “ x е диференцируема”, то можем да конструираме съставен предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$.

Съставни предикати и квантори.

Естествено, предикатът $P(x) \rightarrow Q(x)$ не е съждение, понеже има свободна променлива. Можем да сложим квантор пред него, по този начин свързвайки неговата променлива и превръщайки го в съждение.

$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ е лъжа, понеже не всяка непрекъснатата функция е диференцируема.

$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ е истина, понеже има непрекъснатата функция, която е диференцируема.

Кванторите са с приоритет пред логическите съюзи.

Синтактично, всеки квантор свързва по-силно от логическите съюзи, така че “ $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ ” се чете като $\forall x (P(x)) \rightarrow Q(x)$. По този начин, x в $Q(x)$ е свободна променлива.

Имайте предвид, че ако $\forall x$ или $\exists x$ се следва от лява скоба, обхватът на квантора е до нейната съответна дясна скоба. Това е причината “ $\forall x (P(x)) \rightarrow Q(x)$ ” да има свободна променлива: $Q(x)$ е извън обхвата на квантора.

Кванторите и скобите.

" $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ " няма свободна променлива, понеже и $P(x)$, и $Q(x)$ са в обхвата на квантора.

" $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ " е **съвършено различно нещо** от " $\forall x (P(x)) \rightarrow \forall x (Q(x))$ ". Отново, нека домейнът са реалните функции и $P(x)$ е " x е непрекъсната", а $Q(x)$ е " x е диференцируема".

Смисълът на " $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ " е, че за всяка реална функция, ако тя е непрекъсната, то тя (същата функция!) е диференцируема. Това е лъжа.

Смисълът на " $\forall x (P(x)) \rightarrow \forall x (Q(x))$ " е, че ако всяка реална функция е непрекъсната, то всяка реална функция е диференцируема. Това е истина, защото е импликация с antecedent лъжа.

Дистрибутиране на кванторите спрямо $\wedge$ и $\vee$.

В сила са

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x(P(x)) \wedge \forall x(Q(x))$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x(P(x)) \vee \exists x(Q(x))$$

ако изразът вляво и двата израза вдясно имат един и същи домейн.

Но, в общия случай,

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x(P(x)) \vee \forall x(Q(x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x(P(x)) \wedge \exists x(Q(x))$$

Как се негира квантор

$$\neg \forall x (P(x)) \equiv \exists x (\neg P(x))$$

$$\neg \exists x (P(x)) \equiv \forall x (\neg P(x))$$

Многоместни предикати

Многоместен предикат е изречение с няколко празни места, във всяко от което може да се сложи обект от някакъв домейн. Типичен запис на двуместен предикат е " $P(x, y)$ ". Домейните, от които вземат стойности x и y , в общия случай са независими. Примерно, x може да е плод, а y , цвят.

Многоместен предикат се превръща в съждение само след като всички променливи са получили конкретни стойности. Предвид конвенциите от Слайд 3, ако $P(x, y)$ има смисъл на " x има цвят y ", то $P(\text{авокадо, червен})$ е лъжа.

Когато променливите на многоместен предикат се свържат чрез квантори се получават вложени квантори. Примерно, $\forall x \forall y P(x, y)$, което може да бъде записано и така: $\forall x (\forall y (P(x, y)))$ за недвусмисленост в случай, че $P(x, y)$ е съставен предикат.

По отношение на текущия пример, $\forall x \forall y P(x, y)$ има следния смисъл: за всеки плод, за всеки цвят, има плод в такъв цвят. Това е лъжа по отношение на допусканията на Слайд 3.

Разместване на квантори.

Еднотипни квантори могат да бъдат размествани, ако домейните, от които променливите вземат стойности, не зависят един от друг. Накратко,

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

От друга страна, разнотипни квантори не може да бъдат размествани по този начин. Тоест, в общия случай,

$$\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \forall y P(x, y) \not\equiv \forall y \exists x P(x, y)$$

Забележе, че за всеки предикат $P(x, y)$, изразът $\forall x \exists y P(x, y)$ е еквивалентен на $\forall y \exists x P(y, x)$, тъй като това е просто преименуване на променливите.

Негиране на вложени квантори.

Негацията “преминава” през редица от вложени квантори, обръщайки универсалния квантор в екзистенциален, а екзистенциалния, в универсален. Примерно,

$$\neg \forall x \exists y \forall z (Q(x, y, z)) \equiv \exists x \forall y \exists z (\neg Q(x, y, z))$$

Негиране на вложени квантори.

Пример.

Функцията $f(x)$ с домейн и кодомейн реалните числа има граница L в точка a тогава и само тогава, когато

$$\forall \epsilon_{\epsilon > 0} \exists \delta_{\delta > 0} \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

Отрицанието на това (не е вярно, че $f(x)$ има граница L в точка a) е:

$$\exists \epsilon_{\epsilon > 0} \forall \delta_{\delta > 0} \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon)$$

Необходимост от предикатна логика.

Съждителната логика е доста ограничена като изразителност, понеже нейните прости изречения (простите съждения) са атомарни. Простите съждения са черни кутии – не знаем съдържанието им. Ако променлива p отговаря на просто съждение, то всичко, което знаем за съдържанието на p е, че то е или истина, или лъжа.

Елементарните изречения на предикатната логика са, както човек би очаквал, предикати. Ние знаем съдържанието на предикатите. Ако x е променлива–празно място в предикат, то съдържанието на x е елемент на домейна, който е някакво множество: може да е множество от плодове, от хора, от цели числа, от реални числа, от функции, от графи, от полиноми, от матрици и от какво ли още не. Ерго, предикатната логика е много по-изразителна от съждителната логика.

КРАЙ