Лекция 3: Релации

Минко Марков
minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

27 август 2025 г.

Определение 1

Нека $n \geqslant 1$ *и* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *са множества, наречени съответно първи домейн, втори домейн, ..., n-ти домейн. Релация над декартовото произведение* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ *се нарича всяко множество*

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

Казваме, че R е n-местна, или n-арна. Ако $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, *казваме, че R е хомогенна.*

Ако $n = 2$, релацията е *двуместна*, или *бинарна*. Ако R е двуместна и хомогенна, то R е релация над Декартов квадрат.

Ако кажем "R е релация" без повече уточнения, подразбираме, че R е двуместна и хомогенна.

Примери за релации

$<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ и $=$ са релации над Декартовия квадрат $\mathbb{R}^2$. Съгласно определението, всяка от тях е множество от наредени двойки от реални числа. Вярно е, че $(1,2) \in <$, $(1,2) \in \leqslant$, $(1,1) \in \leqslant$, $(1,1) \notin <$, и така нататък.

Нека S е множество. Дефинираме релацията $\subseteq_S$ над Декартовия квадрат $2^S \times 2^S$ така:

$$\forall a, b \in 2^S \ \left((a,b) \in \subseteq_S \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} a \subseteq b\right)$$

Примерно, нека $S = \{a, b\}$. Вярно, че $(\{a\}, \{a, b\}) \in \subseteq_S$, $(\{a, b\}, \{a\}) \notin \subseteq_S$, и така нататък.

Инфиксен запис при релации

Това е в сила **само** за бинарни релации, независимо от това дали са хомогенни или не.

Нека $R \subseteq A_1 \times A_2$. Наместо да пишем "$(x, y) \in R$", където $x \in A_1$ и $y \in A_2$, пишем много по-прегледното "$x\, R\, y$". Това е *инфиксен запис*: символът на релацията се записва между елементите.

Това е записът, познат ни от училище. Примерно, "$1 < 2$" вместо "$(1, 2) \in <$", "$2 \nless 1$" вместо "$(2, 1) \notin <$", и така нататък.

Примери за релации с по-голяма "местност"

Триместна релация е $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{+} \times \mathbb{N}$, дефинирана така:

$$(a, b, c) \in R \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} a \bmod b = c$$

е релацията на остатък при целочислено делене.

Инфиксният запис не е приложим.

За теоретико-множествената дефиниция на "релация"

Релация означава отношение. Това не може да е дефиниция: а какво е отношение?

Не искаме да въвеждаме ново първично понятие, ако можем да го избегнем. Вече сме въвели "множество" като първично понятие. Всяко друго понятие изграждаме чрез "множество" и естествени езикови конструкции.

Формалната теоретико-множествена дефиниция е смислена: за да определим дадена релация, казваме кои n-орки елементи участват **като n-орки** в нея. Като пример да разгледаме двуместната релация на приятелство над някакво множество от хора. Първо, приемаме, че приятелството е или-или; няма степени на приятелство. Второ, от формална гледна точка, приятелството се определя от двойките хора, които са приятели и това е всичко.

dom(R) и range(R)

Нека $R \subseteq A \times B$ е бинарна релация. Дефинираме следните множества:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(R) &= \{x \in A \,|\, (\exists y \in B : xRy)\} \\ \mathrm{range}(R) &= \{x \in B \,|\, (\exists y \in A : yRx)\} \end{aligned}$$

Забележете, че $\mathrm{dom}(R) \subseteq A$ и $\mathrm{range}(R) \subseteq B$, като е възможно $\mathrm{dom}(R) \subset A$ или $\mathrm{range}(R) \subset B$.

Примерно, ако $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$, то $\mathrm{dom}(R) = \{a, b, d\}$ и $\mathrm{range}(R) = \{1, 3, 4\}$.

Композиция на бинарни релации

Нека $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$ са бинарни релации.
Композицията на Q върху R е релацията $Q \circ R \subseteq A \times C$, дефинирана така:

$$Q \circ R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q)\}$$

Примерно, ако $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$ и
$Q = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \gamma), (4, \gamma)\}$, то

$$Q \circ R = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \alpha), (b, \gamma), (d, \gamma)\} \tag{1}$$

Композицията не е комутативна! В общия случай, $Q \circ R \neq R \circ Q$. Това обяснява израза "композицията на Q върху R".

Обратната релация на бинарна релация.

Нека $R \subseteq A \times B$ е релация. Нейната *обратна релация*, която бележим с "R^{-1}", се дефинира така:

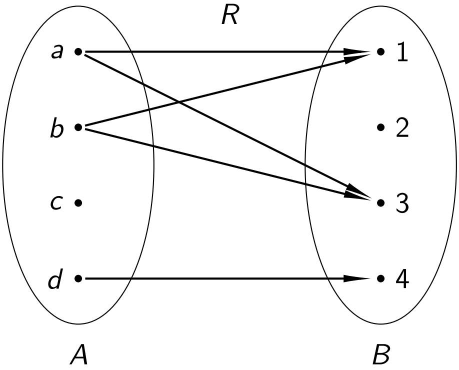
$$R^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

Примерно, ако $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и
$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$, то
$R^{-1} = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (4, d)\}$.

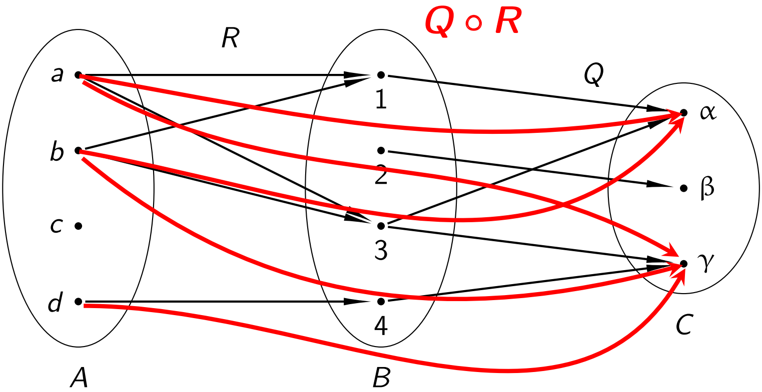
Очевидно $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Представяния на двуместни релации с диаграми

Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ и $R \subseteq A \times B$. Представяме R чрез диаграма от точки и стрелки, като точките отговарят на е-тите на A и B, а стрелка от a_i към b_j има тстк $a_i R b_j$. Точките, съотв. на е-нтите на A, са в елипса вляво, а точките, съотв. на е-нтите на B, са в елипса вдясно. Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$.

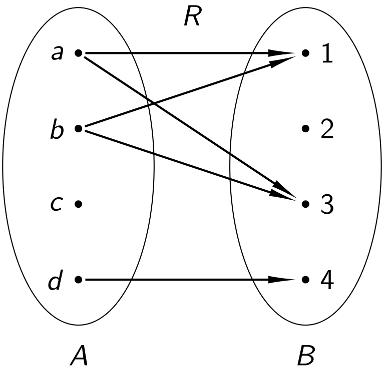


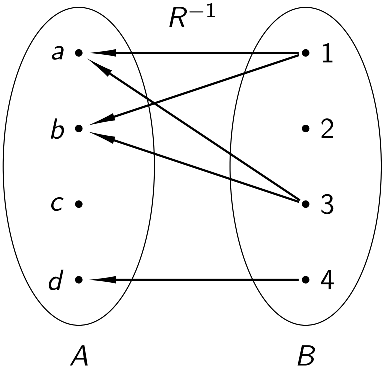
Нека $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
$R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$ и
$Q = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \gamma), (4, \gamma)\}$. $Q \circ R$ се илюстрира така:



Илюстрация на обратната релация с диаграма.

Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4\}$ и $R = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 3), (d, 4)\}$. Както знаем, $R^{-1} = \{(1, a), (1, b), (3, a), (3, b), (4, d)\}$.





Теорема 1

$$P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$$

Доказателство: Неявно, има общо четири домейна. Да ги наречем A, B, C и D. Да определим кой е първият и кой е вторият домейн на всяка от P, Q, R.

Приемаме именуването от Слайд 8 за Q и R: $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$, така че $Q \circ R \subseteq A \times C$: $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{Q} C$.

Нека $S = Q \circ R$. Тогава $S \subseteq A \times C$: $A \xrightarrow{S} C$ и $P \circ (Q \circ R)$ е $P \circ S$. Първият домейн на $P \circ S$ е първият домейн на S, т.е., A. Вторият домейн на $P \circ S$ е вторият домейн на P, който трябва да е D: $A \xrightarrow{S} C \xrightarrow{P} D$. Очевидно $P \subseteq C \times D$.

Разглеждаме $P \circ Q$. Както знаем, $Q \subseteq B \times C$ и $P \subseteq C \times D$, така че $P \circ Q \subseteq B \times D$: $B \xrightarrow{Q} C \xrightarrow{P} D$.

Нека $T = P \circ Q$. Тогава $T \subseteq B \times D$: $B \xrightarrow{T} D$ и $(P \circ Q) \circ R$ е $T \circ R$. Първият домейн на $T \circ R$ е първият домейн на R, тоест A. Вторият домейн на $T \circ R$ е вторият домейн на T, тоест D: $A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{T} D$.

Ще докажем, че $P \circ S = T \circ R$. Забелязваме, че $P \circ S \subseteq A \times D$ и $T \circ S \subseteq A \times D$, тоест, първият и вторият домейн и на двете релации са равни. Ще покажем, че

$$\forall (x, z) \in A \times D \, \big((x, z) \in P \circ S \leftrightarrow (x, z) \in T \circ R \big) \qquad (2)$$

От това следва, че $P \circ S = T \circ R$ съгласно аксиомата за обема.

$$(x,z) \in P \circ (Q \circ R) \;\leftrightarrow\; \exists w \in C : (x,w) \in Q \circ R \wedge (w,z) \in P \;\leftrightarrow$$
$$\exists w \in C : \big(\exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,w) \in Q\big) \wedge (w,z) \in P \;\leftrightarrow$$
$$\exists w \in C\; \exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,w) \in Q \wedge (w,z) \in P \;\leftrightarrow$$
$$\exists y \in B\; \exists w \in C : (x,y) \in R \wedge (y,w) \in Q \wedge (w,z) \in P \;\leftrightarrow$$
$$\exists y \in B\; \exists w \in C : (x,y) \in R \wedge \big((y,w) \in Q \wedge (w,z) \in P\big) \;\leftrightarrow$$
$$\exists y \in B : (x,y) \in R \wedge \big(\exists w \in C : (y,w) \in Q \wedge (w,z) \in P\big) \;\leftrightarrow$$
$$\exists y \in B : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in P \circ Q \;\leftrightarrow$$
$$(x,z) \in (P \circ Q) \circ R$$

Което и трябваше да покажем. $\square$

Обратната релация на композиция на релации

Теорема 2

$(Q \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ Q^{-1}$

Доказателство: Нека $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$. Тогава $Q \circ R \subseteq A \times C$, така че $(Q \circ R)^{-1} \subseteq C \times A$.

$$
\begin{aligned}
&(x, z) \in (Q \circ R)^{-1} \leftrightarrow (z, x) \in Q \circ R \leftrightarrow \\
&\exists y \in B : (z, y) \in R \wedge (y, x) \in Q \leftrightarrow \\
&\exists y \in B : (y, z) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in Q^{-1} \leftrightarrow \\
&\exists y \in B : (x, y) \in Q^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} \leftrightarrow \\
&(x, z) \in R^{-1} \circ Q^{-1}
\end{aligned}
$$

Което и трябваше да покажем. $\square$

Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нека $R \subseteq A^2$. Можем да представим R чрез булева матрица $n \times n$, в която клетката на ред i и колона j е

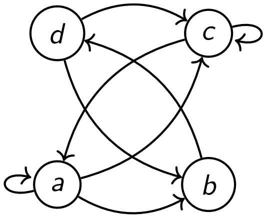
- 1, ако $a_i R a_j$,
- 0, в противен случай.

Например, нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)\}$. Тогава R се представя със следната матрица:

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	1	0

Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нека $R \subseteq A^2$. Можем да представим R чрез диаграма от точки и стрелки, в която на всяко a_i съответства отделна точка, наречена *връх*, а стрелка от върха, съответен на a_i до върха, съответен на a_j, се поставя тогава и само тогава, когато $a_i R a_j$.

Нека $A = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, c)\}$. Тогава R се представя така:



Свойства на бинарните хомогенни релации

Само за релациите от вида $R \subseteq A^2$ дефинираме следните шест стойства.

- рефлексивност
- антирефлексивност
- симетричност
- антисиметричност
- силна антисиметричност
- транзитивност

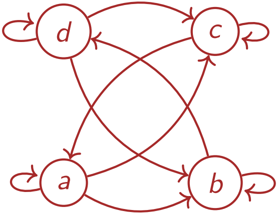
Свойства на релациите
Рефлексивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е *рефлексивна* тстк $\forall a \in A : aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само единици.

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	0	1
c	1	0	1	0
d	0	1	1	1

В представяне с диаграми, всеки връх има примка.



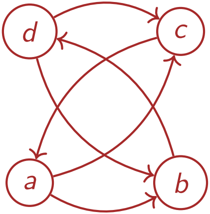
Свойства на релациите
Антирефлексивност

Нека $R \subseteq A^2$. R е *антирефлексивна* тстк $\forall a \in A : \neg aRa$.

В матрично представяне, по главния диагонал има само нули.

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	0	1
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, нито един връх няма примка.



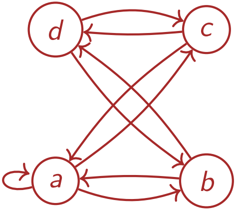
Свойства на релациите
Симетричност

Нека $R \subseteq A^2$. R е *симетрична* тстк $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow bRa$.

В матрично представяне, матрицата е симетрична спрямо главния диагонал. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	1	0	0	1
c	1	0	0	1
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, или има и двете стрелки от единия до другия, или няма нито едната стрелка от единия до другия.

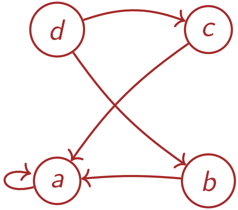


Нека $R \subseteq A^2$. R е *антисиметрична* тстк $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \rightarrow \neg bRa$.

В матрично представяне, матрицата няма симетрична спрямо главния диагонал двойка единици. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	1	0	0	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

В представяне с диаграми, няма два различни върха, такива че има стрелка от първия до втория и от втория до първия.



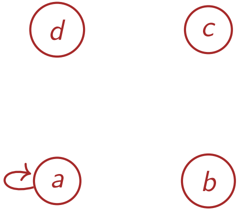
Свойства на релациите
Антисиметричност (2)

Симетричността и антисиметричността **не са** взаимно изключващи се съгласно формалните дефиниции. Може релация $R \subseteq A^2$ да е симетрична и антисиметрична.

В матрично представяне, извън главния диагонал са само нули. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	0	0	0
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, и двете стрелки отсъстват. *Примките* са без значение.



Следните дефиниции са еквивалентни:

$$\forall a, b \in A : a \neq b \rightarrow (aRb \rightarrow \neg bRa)$$
$$\forall a, b \in A : aRb \wedge bRa \rightarrow a = b$$

Дефинираме прости съждения p, q, r така: $\boxed{aRb}$ е p, $\boxed{bRa}$ е q, $\boxed{a = b}$ е r. Твърди се, че

$$\neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \;\equiv\; p \wedge q \rightarrow r$$

Наистина,

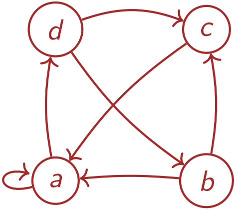
$$p \wedge q \rightarrow r \;\equiv\; \neg(p \wedge q) \vee r \;\equiv\; \neg p \vee \neg q \vee r \;\equiv$$
$$\neg\neg r \vee \neg p \vee \neg q \;\equiv\; \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \;\equiv\; \neg r \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$$

Нека $R \subseteq A^2$. R е *силно антисиметрична* тстк $\forall a, b \in A, a \neq b : aRb \oplus bRa$.

В матрично представяне, всяка двойка клетки, симетрични спрямо главния диагонал, съдържа противоположни стойности. Съдържанието на главния диагонал е без значение.

	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	0	1	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

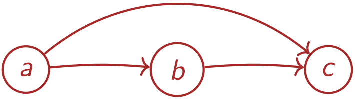
В представяне с диаграми, за всеки два различни върха, точно едната стрелка е налична. Примките са без значение.



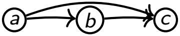
Нека $R \subseteq A^2$. R е *транзитивна* тстк $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \rightarrow aRc$. Нищо не налага a, b и c да са различни!

В матрично представяне транзитивността се описва тромаво, що се отнася до разчитане от човек.

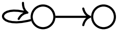
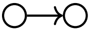
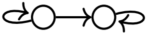
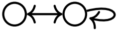
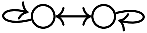
В представяне с диаграми, типичното описание на транзитивността е следното.



Свойства на релациите
Транзитивност (2)

Това описание на транзитивността 

е смислено само при $a \neq b \neq c \neq a$ (неравенството не е транзитивно!).

- Ако $a = b = c$, дали този елемент има примка или няма е без значение за транзитивността:  ✓ или  ✓.
- Ако $a = b \neq c$:
  - ако поне едната стрелка от единия до другия липсва, тази двойка "не пречи" на транзитивността:  ✓,  ✓,  ✓,  ✓.
  - ако и двете стрелки между тях са налице, ако поне единият няма примка, тази двойка "пречи" на транзитивността, иначе "не пречи":  ✗,  ✓.

Нека $R \subseteq A^2$. *Рефлексивното затваряне на* R е минималното множество $R' \subseteq A^2$, такова че $R' \supseteq R$ и R' е рефлексивна релация.

"R' е минималното множество" означава, че за всяко $R'' \subseteq A^2$, такова че $R'' \supseteq R$ и R'' е рефлексивна, е вярно, че $R'' \supseteq R'$.

Симетричното затваряне на R и *транзитивното затваряне на* R се дефинират напълно аналогично: заменяме "рефлексивна" със "симетрична" и "транзитивна".

Релация е рефлексивна тстк съвпада с рефлексивното си затваряне. Аналогично за симетричното и транзитивното затваряне.

Конструиране на затваряния на релации

Нека A е крайно и релациите са представени с матрици.

- Рефлексивното затваряне се получава с едно сканиране на главния диагонал и обръщане на всяка нула в единица.
- Симетричното затваряне се получава чрез сканиране за двойки $(0, 1)$ или $(1, 0)$, които са симетрични спрямо главния диагонал, и обръщане на нулата от двойката в единица.
- Транзитивното затваряне се получава по-сложно (нещо като умножение на матрицата със себе си $n - 1$ пъти).

Релация е *релация на еквивалентност* тстк е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

От разгледаните досега релации над реалните числа само $=$ е релация на еквивалентност.

Релации на еквивалентност – пример

Ще разгледаме друга релация на еквивалентност. Нека S е множеството от всички булеви стрингове с дължина четири.

$$S = \{0000, 0001, \ldots, 1110, 1111\}$$

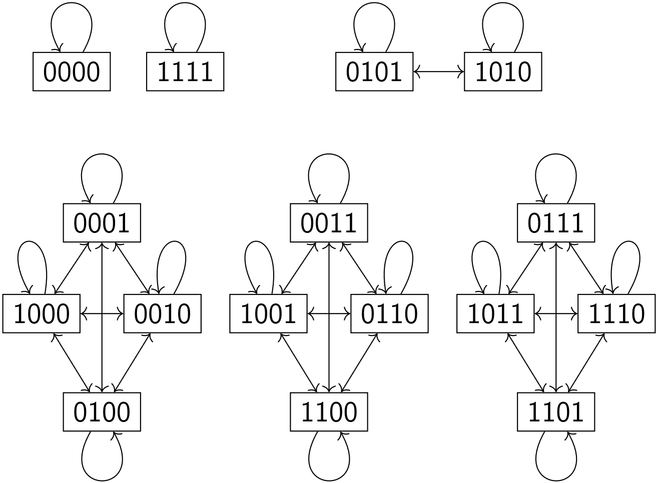
Да въведем релация $R \subseteq S^2$ така: за всеки $a, b \in S$, aRb тогава и само тогава, когато *b е ротация на a*. b е ротация на a тстк съществуват булеви стрингове b_1, b_2 със сумарна дължина четири (тоест, $|b_1| + |b_2| = 4$; b_1 или b_2 може да е празният стринг, тоест, може $|b_1| = 0$ или $|b_2| = 0$), такива че $b = b_1 b_2$ и $a = b_2 b_1$.

Примерно, 0001 е ротация на 0100 с $b_1 = 00$ и $b_2 = 01$, 0101 е ротация на 1010, и така нататък.

R е релация на еквивалентност.

Релации на еквивалентност – пример (2)

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111



Класове на еквивалентност

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. За всеки $a \in A$ дефинираме множеството $[a] \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in A \mid aRb\}$.

В примера от миналия слайд:

$$
\begin{aligned}
[0000] &= \{0000\} \\
[0001] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
[0010] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
[0011] &= \{0011, 0110, 1100, 1001\} \\
[0100] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
[0101] &= \{0101, 1010\} \\
[0110] &= \{0011, 0110, 1100, 1001\} \\
[0111] &= \{0111, 1110, 1101, 1011\} \\
[1000] &= \{0001, 0010, 0100, 1000\} \\
&\cdots \\
[1111] &= \{1111\}
\end{aligned}
$$

Класове на еквивалентност (2)

Теорема 3

Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Тогава фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A.

В примера със стрингове, те са 16 на брой, но фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ има само шест елемента:

$$\big\{\{0000\}, \{1111\}, \{0001, 0010, 0100, 1000\},\\ \{0101, 1010\}, \{0011, 0110, 1100, 1001\}, \{0111, 1110, 1101, 1011\}\big\}$$

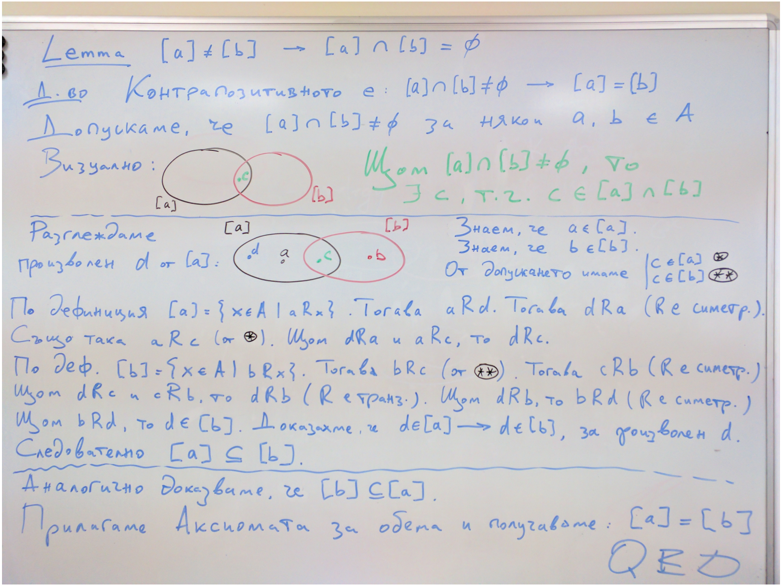
Очевидно тази фамилия е разбиване на S.

Класове на еквивалентност (3)

Доказателство на Теорема 3:

- $\forall Y \in \{[a] \,|\, a \in A\} : Y \subseteq A$. Това е очевидно. ✓
- $\forall Y \in \{[a] \,|\, a \in A\} : Y \neq \emptyset$, тъй като R е рефлексивна. ✓
- $\bigcup \{[a] \,|\, a \in A\} = A$. Това е очевидно. ✓
- Всеки два различни елемента на фамилията $\{[a] \,|\, a \in A\}$ имат празно сечение. Това е неочевидно.

Класове на еквивалентност (4)



Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Съгласно Теорема 3, фамилията $\{[a] \mid a \in A\}$ е разбиване на A. Елементите на тази фамилия се наричат *класовете на еквивалентност на* R.

Щом научим или установим, че дадена релация е релация на еквивалентност, първо трябва да съобразим кои са нейните класове на еквивалентност. Те характеризират релацията напълно, тоест, първичната дефиниция на релация на еквивалентност може да стане чрез класовете на еквивалентност.

Релации на частична наредба (partial order)

Релация е *релация на частична наредба* тстк е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

От разгледаните релации върху реалните числа, $=$, $\leqslant$ и $\geqslant$ са частични наредби. $\subseteq_S$ също е частична наредба.

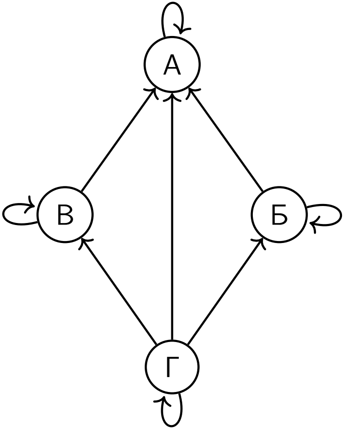
Релации на частична наредба (2)

Частични наредби се появяват, например, при класиране по повече от един критерии. Нека класираме програмисти по C и *Java*, с оценка (x, y), където x е оценката по C, а y, по *Java*. Нека няма еднакви оценки по никой от езиците. Ясно ли е как да класираме?

Не непременно. Ако Албена има $(6, 6)$, Борис има $(5, 5)$, Владо има $(4, 4)$ и Гергана има $(3, 3)$, нещата са ясни. Но ако Борис има $(5, 4)$, а Владо има $(4, 5)$, те двамата стават несравними.

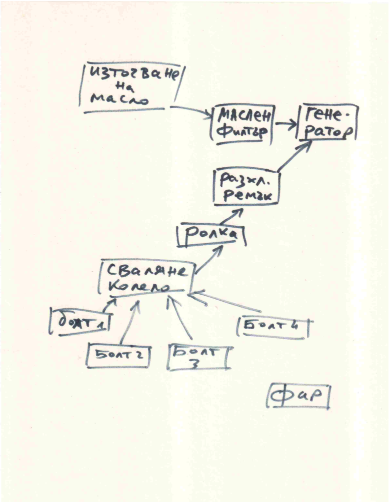
При частичните наредби може (но не непременно!) да има несравними елементи. a и b са несравними, ако $\neg aRb$ и $\neg bRa$.

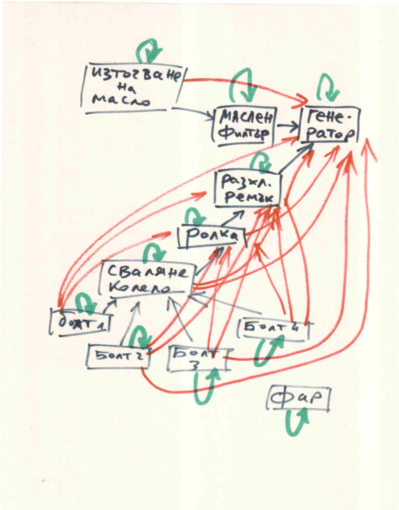
Пример за диаграма на частична наредба



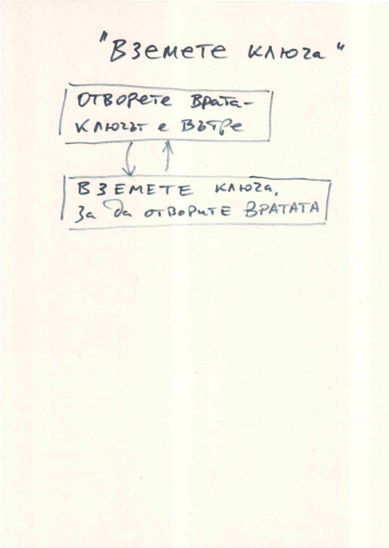
Друг пример за частична наредба

Вляво е релацията "дейност x е непосредствена предпоставка за дейност y". Вдясно е нейното рефлексивно и транзитивно затваряне, което се явява частична наредба.





От това няма да стане частична наредба



Релации на линейна наредба (linear order)

Релация е *релация на линейна наредба* тстк е рефлексивна, силно антисиметрична и транзитивна.

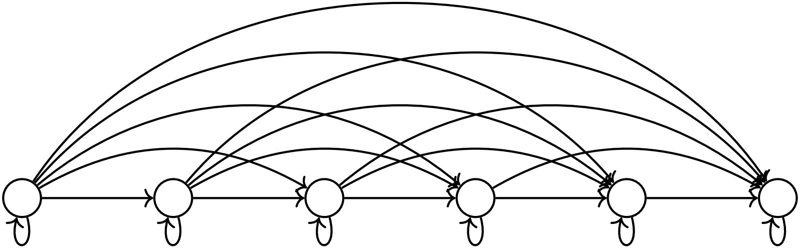
Не може да има несравними двойки елементи заради силната антисиметричност.

Ако $R \subseteq A^2$ е линейна наредба и $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то R има точно $\frac{n(n+1)}{2}$ елемента.

Линейните наредби са частен случай на частичните – всяка линейна е частична, но обратното не е вярно.

Диаграмите на линейните наредби

Всяка линейна наредба над краен Декартов квадрат има диаграма, която е от този вид, или поне може да се нарисува по следния начин. Да кажем, че домейнът има шест елемента.



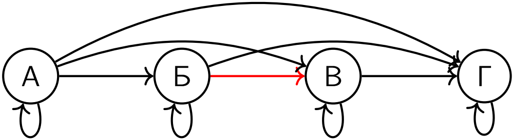
Влагане на частична наредба в линейна наредба (linear extension)

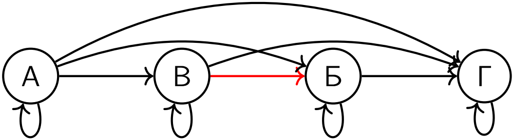
Ако $R \subseteq A^2$ е частична наредба, $R' \subseteq A^2$ е линейна наредба и $R \subseteq R'$, казваме, че *R се влага в R'*. Алтернативно, казваме, че *R' е линейно разширение на R*.

При $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, броят на линейните разширения варира много: от 1 (самата R е линейна наредба) до $n!$ (няма сравними елементи в R).

Линейно разширение: пример

Релацията от Слайд 41 е частична наредба, но не е линейна наредба. Тя има точно две линейни разширения (има две възможности за отношението между Б и В).





Вериги и контури в произволни релации

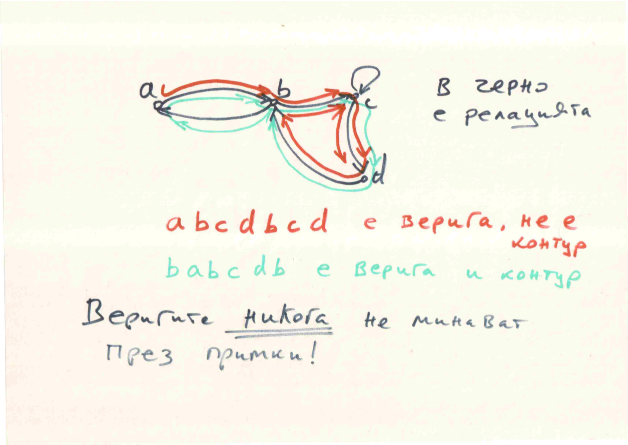
Ако $R \subseteq A^2$ е **произволна** релация и $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, *верига в R* е всяка редица

$$a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$$

където $i_0, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, ако $a_{i_j} R a_{i_{j+1}}$ и $a_{i_j} \neq a_{i_{j+1}}$ за $0 \leqslant j < k$. Ограничение за k няма; иначе казано, $k \geqslant 0$. Тогава един единствен елемент е верига.

Ако $a_{i_0} = a_{i_k}$ и $k > 0$, веригата е *контур*. Лесно се вижда, че $k > 0$ налага $k > 1$. Един единствен елемент не е контур.

Веригата е нещо като разходка в диаграмата, която не може да минава през примки, но може да повтаря върхове. Контурът е разходка, завършваща там, където е започнала.



Теорема 4

Нека $R \subseteq A^2$ е рефлексивна и транзитивна. Тогава R е частична наредба тстк тя няма контури.

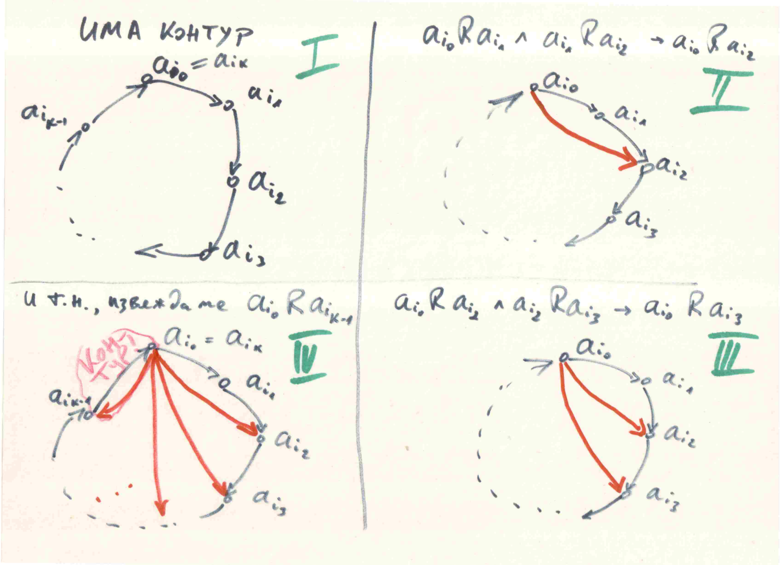
Доказателство, 1. Нека R е частична наредба. Ще докажем, че R няма контури. Допускаме противното: R има контур

$$a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k} = a_{i_0}$$

Щом $a_{i_0} R a_{i_1}$ и $a_{i_1} R a_{i_2}$, то от транзитивността на R следва, че $a_{i_0} R a_{i_2}$. Щом $a_{i_0} R a_{i_2}$ и $a_{i_2} R a_{i_3}$, то от транзитивността на R следва, че $a_{i_0} R a_{i_3}$. И така нататък. Щом $a_{i_0} R a_{i_{k-2}}$ и $a_{i_{k-2}} R a_{i_{k-1}}$, то от транзитивността на R следва, че $a_{i_0} R a_{i_{k-1}}$. Но $a_{i_{k-1}} R a_{i_0}$ от определението на "контур". Тогава R не е антисиметрична. ✓

Частичните наредби нямат контури (3)

Илюстрация на част 1 от д-вото. Чете се в този ред: I, II, III, IV.



Частичните наредби нямат контури (3)

Доказателство, 2. Нека R няма контури. Ще докажем, че R е частична наредба. Допускаме противното: R не е частична наредба. Но в началото сме допуснали, че R е рефлексивна и транзитивна и това допускане е в сила. Щом R е рефлексивна и транзитивна, може да има една единствена причина тя да не е частична наредба – тя не е антисиметрична. Щом не е антисиметрична, задължително съществуват $a, b \in A$, такива че $a \neq b$ и aRb и bRa. Но тогава a, b, a е контур, противно на допускането, че R няма контури. ✓

Рефлексивността не е същностно необходима. В някакъв смисъл, рефлексивността прави нещата по-сложни и трудни за възприемане. Ето примери от видяното досега.

1. Диаграмата на слайд 41 не може да се интерпретира като "x е по-слаб от y" заради примките, тоест, рефлексивността – никой не е по-слаб от себе си. Интерпретацията трябва да е "x е не по-добър от y".
2. На слайд 42, вляво има диаграма на релация на непосредствено предшествие на дейности във времето, а вдясно е съответната частична наредба, която обаче не може да се интепретира като "дейност x предшества дейност y" заради примките – не може дейност да предшества себе си. Рефлексивността налага интерпретацията "дейност x се върши не по-късно от дейност y".

3. Примките по същество са контури и трябва да се правят допълнителни уговорки, за да не бъдат контури съгласно формалните дефиниции.
4. Свързано с това: диаграмите на частичните наредби не са ациклични графи, понеже имат примки. В изложението за релации дефинираме нещата така, че примките не са контури, но в теорията на графите, примките **са** цикли.

Въпреки това, има смисъл да се иска частичните наредби да са рефлексивни. Примерно, релацията $\subseteq_S$ от слайд 3 се смята за знакова частична наредба, а тя е рефлексивна, понеже всяко множество е подмножество на себе си. И изобщо, важна част от теорията на наредбите (order theory) се излага по-лесно и елегантно, ако наредбите са рефлексивни.

Възможен изход от тази дилема е да се въведат други частични наредби, наречени *строги частични наредби*, които са антирефлексивни, антисиметрични и транзитивни. Заради антирефлексивността, те може да се интепретират като релации на "истинско" предшествие, било във времето, било в някакви класирания и т. н.

Антисиметричността е важна, доколкото, в комбинация с транзитивността, гарантира отсъствие на контури (Теорема 3). Контурите са фатални за всяка наредба, което трябва да може да се линеаризира; с други думи, съществува линейно разширение тстк няма контури.

Транзитивността е най-важната характеристика. Няма ли транзитивност, не може да говорим за наредба изобщо.

Известно е следното обобщение на частичните наредби: релация се нарича *преднаредба* (preorder), ако е рефлексивна и транзитивна. Тук за антисиметричност или симетричност не се говори. Релациите на еквивалентност и частичните наредби са частни случаи на преднаредби. В курса ДАА ще разгледаме "истински" преднаредби, които не са симетрични и не са антисиметрични, поради което не са нито релации на еквивалентност, нито частични наредби.

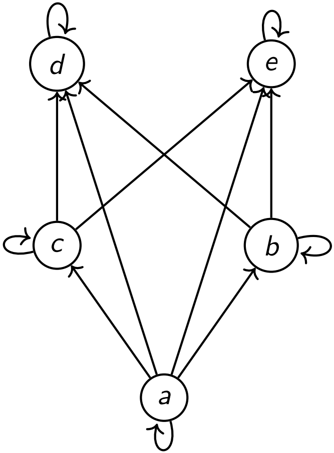
Минимален и максимален елемент в частична наредба

Нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. За всеки $a \in A$, казваме, че *a е минимален в R*, ако $\neg\exists b \in A \backslash \{a\} : bRa$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A \backslash \{a\} : \neg bRa$.

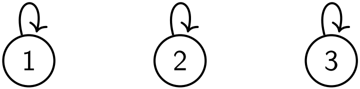
Аналогично, *a е максимален в R*, ако $\neg\exists b \in A \backslash \{a\} : aRb$. Съгласно правилата на предикатната логика, това е еквивалентно на $\forall b \in A \backslash \{a\} : \neg aRb$.

Може да има повече от един минимален и повече от един максимален елемент. Може да няма минимален или максимален елемент.

Минимален и максимален елемент – примери



a е минималният, d и e са максималните.



Всеки елемент е и минимален, и максимален.

Минимален и максимален елемент – примери (2)

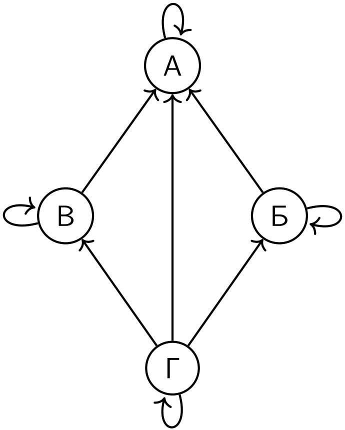
Ако R е линейна наредба и A е крайно множество, има точно един минимален и точно един максимален елемент (които съвпадат тстк множеството има точно един елемент). Обратното не е вярно: може да има точно един минимален и точно един максимален елемент, но наредбата да не е линейна – вижте примера на страница 41.

Ако A е безкрайно, може да няма минимален или максимален елемент. Например, $\leqslant$ няма максимален елемент върху естествените числа, но има минимален елемент – нулата. Върху целите числа тя няма нито минимален, нито максимален елемент.

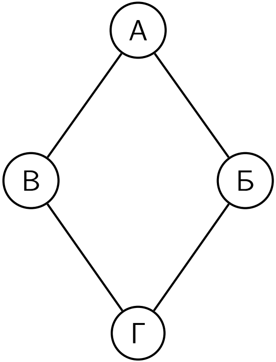
Удобен начин за изобразяване на малки релации на частична наредба. Започваме от диаграмата на релацията. Изпускаме примките – те се подразбират. Рисуваме диаграмата така, че стрелките сочат нагоре; може да не е директно нагоре, но краят на всяка стрелка да е по-високо от началото ѝ. Изпускаме стрелките, чието наличие следва от транзитивността – те се подразбират. Премахваме посоките на стрелките – и те се подразбират (отдолу нагоре).

Резултатът от тези опростявания се нарича *диаграма на Hasse*. Тя съдържа само съществената информация за релацията.

Диаграми на Hasse – пример



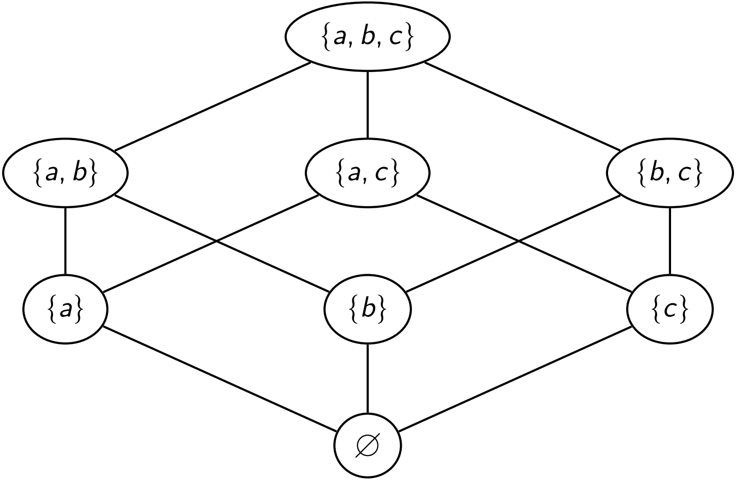
Релацията от страница 41



Нейната диаграма на Hasse.

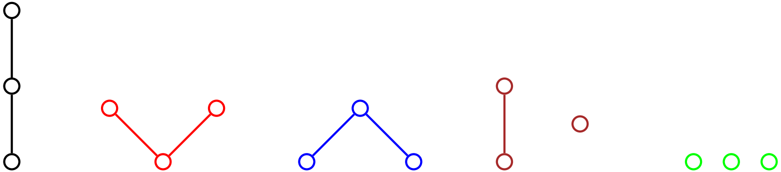
Диаграми на Hasse – друг пример

Диаграмата на Hasse на $\subseteq_S$, ако $S = \{a, b, c\}$.



Нарисувайте сами нормалната диагр. на тази релация и ще оцените колко е по-лесна за възприемане е диагр. на Hasse.

Правим всички диаграми на Hasse на три елемента без имена на елементите. Те са пет на брой. После съобразяваме за всяка от тях по колко различни начина можем да раздадем имената.



6 3 3 6 1

Общо, $6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 19$ частични наредби при три елемента.

КРАЙ